Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

10. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 37	Aufgabe 38	Aufgabe 39	Aufgabe 40	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 37 (Eigenschaften adjungierter Abbildungen, 4 = 0.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdim. unitäre Vektorräume und $f : V \to W$ linear. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V und $\mathcal{C} = (w_1, ..., w_m)$ eine ONB von W. Zeigen Sie:

(a) Für alle $w \in W$: $f^{ad}(w) = \sum_{i=1}^n \langle w, f(v_i)\rangle_W v_i$.

(b) Seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ nur Basen (nicht notwendig ONB) von V bzw. W. Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f^{\mathrm{ad}}) = \left(\overline{M_{\mathcal{B}}^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_V)}\right)^{-1} \cdot \overline{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}^t \cdot \overline{M_{\mathcal{C}}^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_W)}.$$

Bemerkung: Eine analoge Formel (ohne komplex konjugiert) gilt für Euklidische Vektorräume.

(c) Ist $X \subset W$ ein Untervektorraum, so gilt $f^{ad}(X^\perp) = f^{-1}(X)^\perp$.
Hinweis: Nutzen Sie P34(d).

(d) Ist $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle_Z)$ ein weiterer endlichdim. unitärer Vektorraum und $g : W \to Z$ linear, so ist $(g \circ f)^{ad} = f^{ad} \circ g^{ad}$.

Lösung:

(a) $\mathcal{B}$ ONB $\Rightarrow f^{ad}(w) = p_V(f^{ad}(w)) = \sum_{i=1}^n \langle f^{ad}(w), v_i\rangle_V v_i \overset{\text{Def. } f^{ad}}{=} \sum_{i=1}^n \langle w, f(v_i)\rangle_W v_i$.
(p_V bezeichnet die Orthogonalprojektion auf V).

(b) Sei $i \in \{1, ..., n\}, j \in \{1, ..., m\}$ beliebig.
Def. $f^{ad} \Rightarrow$

$$\langle v_i, f^{ad}(w_j)\rangle_V = \langle f(v_i), w_j\rangle_W. \qquad (**)$$

Wir drücken nun die linke und die rechte Seite durch die Größen in der Aufgabenstellung aus. Es gilt:

$$f^{ad}(w_j) = \sum_{k=1}^n M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f^{ad})_{kj} v_k, \qquad f(v_i) = \sum_{k=1}^m M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)_{ki} w_k \qquad (*)$$

Damit ist:

$$\langle v_i, f^{ad}(w_j)\rangle_V \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f^{ad})_{kj}} \underbrace{\langle v_i, v_k\rangle_V}_{=M_{\mathcal{B}}^*(\langle .,.\rangle_V)_{ik}} = \left[M_{\mathcal{B}}^*(\langle .,.\rangle_V) \cdot \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f^{ad})}\right]_{ij},$$

und

$$\langle f(v_i), w_j\rangle_W \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{m} \underbrace{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)_{ki}}_{=((M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f))^t)_{ik}} \underbrace{\langle w_k, w_j\rangle_W}_{=M_{\mathcal{C}}^*(\langle .,.\rangle_W)_{kj}} = \left[M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)^t \cdot M_{\mathcal{C}}^*(\langle .,.\rangle_W)\right]_{ij}.$$

Mit $(**)$ folgt

$$M_{\mathcal{B}}^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_V) \cdot \overline{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f^{ad})} = M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)^t \cdot M_{\mathcal{C}}^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_W).$$

$M_{\mathcal{B}}^*(\langle\cdot,\cdot\rangle_V)^{-1} \cdot (...)$ und komplexe Konjugation liefert die Behauptung.
(Für eine Matrix $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ lässt sich elementar zeigen, dass $\overline{A^{-1}} = (\overline{A})^{-1}$ gilt.)

(c) Seien $\Psi : V \to V^*, \Phi : W \to W^*$ die zu $\langle\cdot,\cdot\rangle_V$ bzw. $\langle\cdot,\cdot\rangle_W$ gehörigen kanonischen Isomorphismen.
$\Rightarrow f^{ad} = \Psi^{-1} \circ f^* \circ \Phi$.
$\Rightarrow$

$$f^{ad}(U^\perp) = \Psi^{-1}(f^*(\Phi(U^\perp))) \overset{VL}{=} \Psi^{-1}(f^*(U^0)) \overset{P34(d)}{=} \Psi^{-1}(f^{-1}(U)^0) \overset{VL}{=} f^{-1}(U)^\perp.$$

(d) Wir rechnen nach, dass $f^{\mathrm{ad}} \circ g^{ad}$ die adjungierte Abbildung zu $f \circ h$ ist ($\Rightarrow (g \circ f)^{ad} = f^{ad} \circ g^{ad}$).
Es gilt für $u \in U, z \in Z$:

$$\begin{aligned}\langle (g \circ f)(u), z\rangle_Z &= \langle g(f(u)), z\rangle_Z \overset{\text{Def. adj. Abb.}}{=} \langle f(u), g^{ad}(z)\rangle_W \\ &\overset{\text{Def. adj. Abb.}}{=} \langle u, \underbrace{f^{ad}(g^{ad}(z))}_{=(f^{ad}\circ g^{ad})(z)}\rangle_U.\end{aligned}$$

Aufgabe 38 (Beispiele für unitäre und selbstadjungierte Abbildungen in unitären Vektorräumen, 4 = 1 + 0.5 + 0.5 + 2 Punkte).
Gegeben seien Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob A_i, $i = 1, 2, 3$ symmetrisch, hermitesch oder sogar positiv definit sind.
Hinweis: Sowohl die Charakterisierung positiv definiter Matrizen über das Hauptminorenkriterium als auch über positive Eigenwerte gelten weiterhin für hermitesche Matrizen.

(b) Bestimmen Sie eine ONB im unitären Standardraum $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ aus Eigenvektoren von A_3.

(c) Gegeben sei das positiv definite $C := \begin{pmatrix} 1 & i/2 \\ -i/2 & 1 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie eine ONB von $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens ausgehend von der Basis $(v_1, v_2) := ((i, 0)^t, (0, 1)^t)$.

(d) Prüfen Sie, ob die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$f_1(v) := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} v, \quad f_2(v) := \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

selbstadjungiert / unitär in $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bzw. $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ sind. Geben Sie auch jeweils die adjungierte Abbildung an, d.h. $M_E^E(f_1^{ad})$ und $M_E^E(f_2^{ad})$, wobei $E = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ bezeichnet.
Hinweis: Nutzen Sie bei Bedarf A37(b).

Lösung:

(a)
- A_1 ist symmetrisch, aber nicht hermitesch (Diagonalelemente von A_1 nicht reell). Da A_1 nicht hermitesch, ist positiv definit nicht definiert.
- A_2 ist nicht symmetrisch aber hermitesch, denn $\overline{A_2}^t = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{smallmatrix}\right) = A_2$.
  Es gilt $\det(A_2^{(1)}) = \det(-1) = -1 < 0 \overset{\text{Hauptminorenkriterium}}{\Rightarrow} A_4$ ist nicht positiv definit.
- A_3 ist nicht symmetrisch. A_3 ist hermitesch, denn $\overline{A_3}^t = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 5 \end{smallmatrix}\right)^t = A_3$.
  Es gilt $\det(A_3^{(1)}) = \det(1) = 1 > 0$, und $\det(A_3) = 25 - (3i)(-3i) = 16 > 0$ $\overset{\text{Hauptminorenkriterium}}{\Rightarrow} A_4$ ist positiv definit.
  (Alternativ: Berechne Eigenwerte von A_3: $\chi_{A_3} = (t-5)^2 - (3i)(-3i) = (t-8)(t-2) \implies$ EW sind $2, 8$ und somit alle positiv).

(b) Berechne Eigenräume:

$$\begin{aligned} \operatorname{Eig}(A_3, 2) &= \operatorname{Kern}(A_3 - 2E_2) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 3 & 3i \\ -3i & 3 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Lin}((i, -1)^t), \\ \operatorname{Eig}(A_3, 8) &= \operatorname{Kern}(A_3 - 8E_2) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -3 & 3i \\ -3i & -3 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{Lin}((i, 1)^t). \end{aligned}$$

A_3 hermitesch $\overset{\text{Spektralsatz}}{\Rightarrow} \operatorname{Eig}(A_3, 2) \perp \operatorname{Eig}(A_3, 8)$
$\Rightarrow$ Gefundene Vektoren $((i, -1)^t, (i, 1)^t)$ müssen bereits orthogonal sein bzgl. Standardskalarprodukt.

(c) (i) Gram-Schmidt: Seien $v_1 = (i, 0)^t$, $v_2 = (0, 1)^t$.
$\tilde{w}_1 := v_1 = (i, 0)^t$, $\|\tilde{w}_1\|_C^2 = 1 \Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|_C} = (i, 0)^t$.
$\tilde{w}_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle_C w_1 = (0, 1)^t - \underbrace{(0, 1)C(-i, 0)^t}_{=-1/2} \cdot (i, 0) = (i/2, 1)^t$.
$\|\tilde{w}_2\|_C^2 = (i/2, 1)C(-i/2, 1)^t = \frac{3}{4} \Rightarrow w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|_C} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i, 2)^t$.

(ii)
- In $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist $E := (e_1, e_2)$ eine ONB, d.h. wir können direkt anhand $M_E^E(f_1)$ prüfen:
  Es ist $A := M_E^E(f_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}$ und $\overline{A}^t A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -i & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}$. $\Rightarrow f_1$ nicht unitär.
  A ist nicht hermitesch $(\overline{A}^t \neq A) \overset{E \text{ ONB}}{\Rightarrow} A$ nicht selbstadjungiert.

Es gilt $M_E^E(f_1^{ad}) \overset{E \text{ ONB}}{=} \overline{M_E^E(f_1)}^t = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix}$.

In $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ ist $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ eine ONB.
Es ist $T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_1) = \underbrace{T_{\mathcal{B}}^E}_{=(T_E^{\mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M_E^E(f_1)}_{=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} i & -1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{T_E^{\mathcal{B}}}_{=\begin{pmatrix} i & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} =: A.$$

Offensichtlich ist A unitär $\Rightarrow$ f_1 ist unitär.
A ist nicht hermitesch ($\overline{A}^t \neq A$) $\Rightarrow$ f_1 nicht selbstadjungiert.
A37(b) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} M_E^E(f_1^{ad}) &= \overline{M_E^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_C)}^{-1} \overline{M_E^E(f_1)}^t \overline{M_E^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_C)} \\ &\overset{M_E^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_C) = C}{=} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i/2 \\ i/2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -2 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- In $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist $E := (e_1, e_2)$ eine ONB, d.h. wir können direkt anhand $M_E^E(f_2)$ prüfen:
  Offensichtlich ist A nicht unitär, da die Spalten nicht normiert sind.
  A ist nicht hermitesch ($\overline{A}^t \neq A$) $\overset{E \text{ ONB}}{\Rightarrow}$ A nicht selbstadjungiert.
  Es gilt $M_E^E(f_2^{ad}) \overset{E \text{ ONB}}{=} \overline{M_E^E(f_2)}^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix}$.

  In $(\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_C)$ ist $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ eine ONB.
  Es ist $T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} i & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Es gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f_2) = \underbrace{T_{\mathcal{B}}^E}_{=(T_E^{\mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2i & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{M_E^E(f_2)}_{=\begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underbrace{T_E^{\mathcal{B}}}_{=\begin{pmatrix} i & i/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: A.$$

  A ist unitär, da $\overline{A}^{-t} A = E_2$.
  A ist hermitesch ($\overline{A}^t = A$) $\Rightarrow$ f_2 ist selbstadjungiert.
  $\Rightarrow$

$$M_E^E(f_2^{ad}) = \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 39 (Adjungierte Abbildungen im Polynomraum, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sei $V := \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum der Polynome ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Sei $D : V \to V$, $p \mapsto p'$ die Ableitung und $U \subset V$ ein Untervektorraum.

(a) Sei zunächst $U := \mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ mit Monombasis $E = (1, t)$.
Geben Sie $M_E^E((D\big|_U)^{ad})$ an. Ist $D\big|_U$ selbstadjungiert?

(b) Sei $U := \{p \in V : p(0) = p(1) = 0\}$.
Ermitteln Sie eine allgemeine Formel für $(D\big|_U)^{ad}$.
Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

(c) Zeigen Sie, dass auf V die Abbildung D^{ad} nicht existiert.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe geeigneter Polynome, dass D^{ad} dieselbe Form wie in (b) besitzen muss.

(d) Sei $f : V \to V$, $f(p) = t \cdot p$. Ist f selbstadjungiert?

Lösung:

(a) Sei $f := D|_U$.
A... $\Rightarrow M_E^E(f^{ad}) = M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle)^{-1} M_E^E(f)^t M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle)$.
Hier ist

$$\begin{aligned} M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle) &= (\langle t^i, t^j\rangle)_{i,j=0,1} = \left(\int_0^1 t^{i+j}dt\right)_{i,j=0,1} = \left(\frac{1}{1+i+j}\right)_{i,j=0,1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \\ M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle)^{-1} &= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, \\ M_E^E(f) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A37(b) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} M_E^E(f^{ad}) &= M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle)^{-1} M_E^E(f)^t M_E^*(\langle\cdot,\cdot\rangle) \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

f ist nicht selbstadjungiert, da $M_E^E(f) \neq M_E^E(f^{ad})$ ($\Rightarrow f \neq f^{ad}$).

(b) Für $p, q \in U$ gilt:

$$\begin{aligned} \langle D|_U(p), q\rangle &= \langle p', q\rangle = \int_0^1 p'(t)q(t)dt \overset{\text{partielle Int.}}{=} \underbrace{\big[p(t)q(t)\big]_0^1}_{\overset{p,q\in U}{=}0} - \int_0^1 p(t)q'(t)dt \\ &= \int_0^1 p(t)(-q'(t))dt = \langle p, -q'\rangle \overset{!}{=} \langle p, (D|_U)^{ad}(q)\rangle. \end{aligned}$$

Das heißt, die adjungierte Abbildung ist gegeben durch $(D|_U)^{ad}(q) = -q'$.

(c) Angenommen, es gäbe eine adjungierte Abbildung D^{ad} von D. Wie in (ii) muss dann gelten:

$$\forall p, q \in V: \quad p(1)q(1) - p(0)q(0) = \int_0^1 p(t)(D^{ad}(q)(t) + q'(t))dt. \quad (*)$$

Wähle $p = (t-1)t \cdot g$ mit $g \in V$ beliebig, so gilt

$$\begin{aligned} \forall g, q \in V: \quad 0 &= \int_0^1 (t-1)t \cdot g \cdot (D^{ad}(q)(t) + q'(t))dt \\ &= \langle g, (t-1)t \cdot (D^{ad}(q) + q')\rangle \end{aligned}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle$ nicht ausgeartet $\Rightarrow (t-1)t(D^{ad}(q)+q')=0$
$\overset{\mathbb{R}[t] \text{ nullteilerfrei}}{\Rightarrow} D^{ad}(q)+q'=0$
$\Rightarrow D^{ad}(q)=-q'$.

Setze nun $p=1, q=t$ in (*) ein, so folgt $1=0$, Widerspruch. Also existiert D^{ad} nicht.

(d) Es muss gelten: Für alle $p,q\in V$:

$$\int_0^1 p(t)f^{ad}(q)(t)dt = \langle p, f^{ad}(q)\rangle \overset{!}{=} \langle f(p), q\rangle = \int_0^1 tp(t)q(t)dt. \quad (*)$$

Wähle $f^{ad}(q)=tq$, dann ist $(*)$ erfüllt.
$\Rightarrow f=f^{ad} \Rightarrow f$ selbstadjungiert.

Aufgabe 40 (Charakterisierung selbstadjungierter Abbildungen im unitären Raum, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdim. unitärer Vektorraum und $f\in\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Für $\lambda\in\mathbb{C}$, $v,w\in V$ gilt

$$\langle f(\lambda v+w),\lambda v+w\rangle = |\lambda|^2\langle f(v),v\rangle + \lambda\langle f(v),w\rangle + \bar\lambda\langle f(w),v\rangle + \langle f(w),w\rangle.$$

(b) Gilt $\forall v\in V: \langle f(v),v\rangle=0$, so ist bereits $f=0$.
Hinweis: Wenden Sie (a) mit $\lambda\in\{1,i\}$ an.

(c) Es gilt: f selbstadjungiert $\iff \forall\, v\in V: \langle f(v),v\rangle\in\mathbb{R}$.

(d) Ist $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdim. Euklidischer Vektorraum, so muss (b) nicht gelten.
Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $A=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}\langle f(\lambda v+w),\lambda v+w\rangle &\overset{f \text{ linear}}{=} \langle\lambda f(v)+f(w),\lambda v+w\rangle\\ &\overset{\gamma \text{ linear 1. Arg.}}{=} \lambda\langle f(v),\lambda v+w\rangle + \langle f(w),\lambda v+w\rangle\\ &\overset{\gamma \text{ semilinear 2. Arg.}}{=} \underbrace{\lambda\bar\lambda}_{=|\lambda|^2}\langle f(v),v\rangle + \lambda\langle f(v),w\rangle\\ &\qquad +\bar\lambda\langle f(w),v\rangle + \langle f(w),w\rangle\end{aligned}$$

(b) Seien $v,w\in V$ beliebig. Dann gilt mit (a):

(i) Für $\lambda=1$ folgt

$$0=\langle f(v+w),v+w\rangle = \underbrace{\langle f(v),v\rangle}_{=0} + \langle f(v),w\rangle + \langle f(w),v\rangle + \underbrace{\langle f(w),w\rangle}_{=0}. \quad (*)$$

(ii) Für $\lambda=i$ folgt

$$0=\langle f(iv+w),iv+w\rangle = \underbrace{\langle f(v),v\rangle}_{=0} + i\langle f(v),w\rangle - i\langle f(w),v\rangle + \underbrace{\langle f(w),w\rangle}_{=0}. \quad (**)$$

$\overset{(*)-i(**)}{\Longrightarrow} 0 = 2\langle f(v), w\rangle.$
Mit $w := f(v)$ folgt: $\|f(v)\|^2 \implies f(v) = 0.$
$\Rightarrow f = 0.$

(c) • „$\Rightarrow$“: Für alle $v \in V$ gilt

$$\langle f(v), v\rangle = \langle v, f^{\mathrm{ad}}(v)\rangle \overset{f \text{ selbstadj.}}{=} \langle v, f(v)\rangle = \overline{\langle f(v), v\rangle} \implies \langle f(v), v\rangle \in \mathbb{R}.$$

• „$\Leftarrow$“: Für alle $v \in V$ gilt

$$\begin{aligned} & \langle f(v), v\rangle = \overline{\langle f(v), v\rangle} = \langle v, f(v)\rangle = \langle f^{\mathrm{ad}}(v), v\rangle \\ \implies & \langle (f - f^{\mathrm{ad}})(v), v\rangle = 0 \\ \overset{\text{(b)}}{\implies} & f - f^{\mathrm{ad}} = 0 \\ \implies & f = f^{ad}, \text{ d.h. } f \text{ selbstadjungiert.} \end{aligned}$$

(d) Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\langle x, y\rangle = x^t y$ das Standardskalarprodukt. Dann gilt für beliebiges $v = (v_1, v_2)^t \in \mathbb{R}^2$:

$$\langle \tilde{A}(v), v\rangle = (-v_2, v_1)^t \cdot (v_1, v_2) = -v_1 v_2 + v_1 v_2 = 0,$$

aber $\tilde{A} \neq 0$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **4. Juli 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`