UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

10. Abgabeblatt

Aufgabe 37	Aufgabe 38	Aufgabe 39	Aufgabe 40	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 37 (Eigenschaften adjungierter Abbildungen, 4 = 0.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V), (W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ endlichdim. unitäre Vektorräume und $f: V \to W$ linear. Es sei $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine ONB von V und $\mathcal{C} = (w_1, ..., w_m)$ eine ONB von W. Zeigen Sie:

(a) Für alle $w \in W$: $f^{ad}(w) = \sum_{i=1}^n \langle w, f(v_i)\rangle_W v_i$.

(b) Seien $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ nur Basen (nicht notwendig ONB) von V bzw. W. Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f^{\mathrm{ad}}) = \left(\overline{M_{\mathcal{B}}^{*}(\langle\cdot,\cdot\rangle_V)}\right)^{-1} \cdot \overline{M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)}^{t} \cdot \overline{M_{\mathcal{C}}^{*}(\langle\cdot,\cdot\rangle_W)}.$$

Bemerkung: Eine analoge Formel (ohne komplex konjugiert) gilt für Euklidische Vektorräume.

(c) Ist $X \subset W$ ein Untervektorraum, so gilt $f^{ad}(X^\perp) = f^{-1}(X)^\perp$.
Hinweis: Nutzen Sie P34(d).

(d) Ist $(Z, \langle\cdot,\cdot\rangle_Z)$ ein weiterer endlichdim. unitärer Vektorraum und $g: W \to Z$ linear, so ist $(g \circ f)^{ad} = f^{ad} \circ g^{ad}$.

Aufgabe 38 (Beispiele für unitäre und selbstadjungierte Abbildungen in unitären Vektorräumen, 4 = 1 + 0.5 + 0.5 + 2 Punkte).

Gegeben seien Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & i \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 3i \\ -3i & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Überprüfen Sie, ob A_i, $i = 1, 2, 3$ symmetrisch, hermitesch oder sogar positiv definit sind.
Hinweis: Sowohl die Charakterisierung positiv definiter Matrizen über das Hauptminorenkriterium als auch über positive Eigenwerte gelten weiterhin für hermitesche Matrizen.

(b) Bestimmen Sie eine ONB im unitären Standardraum $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ aus Eigenvektoren von A_3.

(c) Gegeben sei das positiv definite $C := \begin{pmatrix} 1 & i/2 \\ -i/2 & 1 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie eine ONB von $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens ausgehend von der Basis $(v_1, v_2) := ((i,0)^t, (0,1)^t)$.

(d) Prüfen Sie, ob die Abbildungen $f_1, f_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$,

$$f_1(v) := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 2 & -i \end{pmatrix} v, \quad f_2(v) := \begin{pmatrix} -1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$$

selbstadjungiert / unitär in $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bzw. $(\mathbb{C}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ sind. Geben Sie auch jeweils die adjungierte Abbildung an, d.h. $M_E^E(f_1^{ad})$ und $M_E^E(f_2^{ad})$, wobei $E = (e_1, e_2)$ die Standardbasis von $\mathbb{C}^2$ bezeichnet.
Hinweis: Nutzen Sie bei Bedarf A37(b).

Aufgabe 39 (Adjungierte Abbildungen im Polynomraum, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sei $V := \mathbb{R}[t]$ der Vektorraum der Polynome ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Sei $D : V \to V$, $p \mapsto p'$ die Ableitung und $U \subset V$ ein Untervektorraum.

(a) Sei zunächst $U := \mathbb{R}[t]_{\leq 1}$ mit Monombasis $E = (1, t)$.
Geben Sie $M_E^E((D\big|_U)^{ad})$ an. Ist $D\big|_U$ selbstadjungiert?

(b) Sei $U := \{p \in V : p(0) = p(1) = 0\}$.
Ermitteln Sie eine allgemeine Formel für $(D\big|_U)^{ad}$.
Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration.

(c) Zeigen Sie, dass auf V die Abbildung D^{ad} nicht existiert.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe geeigneter Polynome, dass D^{ad} dieselbe Form wie in (b) besitzen muss.

(d) Sei $f : V \to V$, $f(p) = t \cdot p$. Ist f selbstadjungiert?

Aufgabe 40 (Charakterisierung selbstadjungierter Abbildungen im unitären Raum, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdim. unitärer Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Für $\lambda \in \mathbb{C}$, $v, w \in V$ gilt

$$\langle f(\lambda v + w), \lambda v + w\rangle = |\lambda|^2 \langle f(v), v\rangle + \lambda\langle f(v), w\rangle + \bar{\lambda}\langle f(w), v\rangle + \langle f(w), w\rangle.$$

(b) Gilt $\forall v \in V : \langle f(v), v\rangle = 0$, so ist bereits $f = 0$.
Hinweis: Wenden Sie (a) mit $\lambda \in \{1, i\}$ an.

(c) Es gilt: f selbstadjungiert $\iff \forall\, v \in V : \langle f(v), v\rangle \in \mathbb{R}$.

(d) Ist $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdim. Euklidischer Vektorraum, so muss (b) nicht gelten.
Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **04. Juli 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`