UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

9. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 33	Aufgabe 34	Aufgabe 35	Aufgabe 36	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 33 (Charakterisierung von Linearformen/Annulatoren im Polynomraum, 6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 Punkte).

Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad höchstens 2 über $\mathbb{R}$, und den Standardvektorraum $W := \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Es bezeichne $E := (1, t, t^2)$ die Monombasis von V, und $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von W.

(a) Wir betrachten die Linearform $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = p(0) + p(1) + p(2)$. Sei $g : W \to V$, $e_i \mapsto t^{i-1}$. Berechnen Sie $g^*(\varphi)$.

Sei $U := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ mit $v_1 := 1 - 2t, v_2 = 3t^2 - 3$ ein UVR von V.

(b) Berechnen Sie eine Basis von U^0 in Termen von E^*.

Gegeben sei nun die lineare Abbildung

$$f : V \to W, \quad f(p) := \Big(\int_0^1 p(t)dt, \int_0^1 p(-t)dt, \int_0^1 p(2t)dt \Big)^t.$$

(c) Berechnen Sie eine Basis (w_1, w_2) von $X := f(U)$, und berechnen Sie X^0 auf zwei verschiedene Weisen:

(i) Ergänzen Sie (w_1, w_2) zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von W und nutzen Sie $X^0 = \mathrm{Lin}(w_3^*)$.

(ii) Statten Sie W mit dem Standardskalarprodukt aus und berechnen Sie $X^0 = \Psi(X^\perp)$, wobei $\Psi : W \to W^*$ den zugehörigen kanonischen Isomorphismus bezeichnet.

(d) Ermitteln Sie U^0 aus X^0.
Hinweis: Nutzen Sie die Pullback-Formel aus A34(c).

(e) Zeigen Sie, dass $U = \{p \in V : \int_0^1 p(-t) + 2p(2t)dt = 0\}$.
Hinweis: Nutzen Sie P34(c).

Lösung:

(a) Es gilt

$$M_1^{E_3}(g^*(\varphi)) = M_1^{E_3}(\varphi \circ g) = \underbrace{M_1^E(\varphi)}_{=(3,3,5)} \cdot \underbrace{M_E^{E_3}(g)}_{=E_3} = (3,3,5),$$

d.h. $g^*(\varphi) = \widetilde{(3,3,5)}$.
$g^*(\varphi)$ *„imitiert“ die Messung φ auf V auf dem Vektorraum W.*

(b) Ergänze mit $v_3 = 1$ zu Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ von V.
$\Rightarrow$

$$T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$

$$T_{E^*}^{\mathcal{B}^*} = ((T_E^{\mathcal{B}})^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow U^0 = \mathrm{Lin}(v_3^*)$ mit $v_3^* = 2 \cdot 1^* + t^* + 2 \cdot (t^2)^*$ bzw. $M_1^E(v_3^*) = (2,1,2)$.

(c) Mit

$$w_1 := f(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 := f(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist (w_1, w_2) eine Basis von X. Ergänze mit $w_3 = (0,1,0)^t$ zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von W. Es sei $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis in W.

(i) Es ist

$$T_{E_3}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$

$$T_{E_3^*}^{\mathcal{C}^*} = ((T_{E_3}^{\mathcal{C}})^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow X^0 = \mathrm{Lin}(w_3^*)$ mit $w_3^* = \widetilde{(0,1,2)}$ bzw. $M_1^{E_3}(w_3^*) = (0,1,2)$.

(ii) Gram-Schmidt auf (w_1, w_2, w_3) liefert ONB

$$\hat{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow U^\perp = \mathrm{Lin}(\hat{w}_3)$.
$U^0 = \Psi(U^\perp) = \mathrm{Lin}(\Psi(\hat{w}_3))$, wobei

$$M_1^{E_3}(\underbrace{\Psi(\hat{w}_3)}_{=\langle \cdot, \hat{w}_3 \rangle}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(0,1,2).$$

(d.h. gleiches Ergebnis bei (i) und (ii)).

(d) Es ist

$$M_{E_3}^E(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow \operatorname{Rang}(M_{E_3}^E(f)) = 3 \Rightarrow \operatorname{Rang}(f) = 3 \Rightarrow \operatorname{Rang}(f^*) = 3 \Rightarrow f^*$ Isomorphismus.
Hinweis $\Rightarrow U^0 = f^*((f(U)^0) = f^*(X^0) = \operatorname{Lin}(f^*(w_3^*))$. Hier ist

$$(f^*(w_3^*))(p) = w_3^*(f(p)) = w_3^*\Big(\begin{pmatrix} \int_0^1 p(t)dt \\ \int_0^1 p(-t)dt \\ \int_0^1 p(2t)dt \end{pmatrix} \Big) = \int_0^1 [p(-t) + 2p(2t)]dt.$$

(oder alternativ: $M_1^{E^*}(f^*(w_3^*)) = M_1^{E^*}(w_3^* \circ f) = M_1^{E_3}(w_3^*) \cdot M_E^{E_3}(f) = (0,1,2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} =$
$(3, \frac{3}{2}, 3)$, liefert wieder die Darstellung aus (a).

(e) Wir haben mit (a) und (c) zwei verschiedene Darstellungen für $\tilde{U}$:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &\overset{(a)}{=} \{p \in V : \left[2 \cdot 1^* + t^* + 2 \cdot (t^2)^*\right](p) = 0\} \\ \tilde{U} &\overset{(b)}{=} \{p \in V : \int_0^1 [p(-t) + 2p(2t)]dt = 0\}. \end{aligned}$$

P35(c) $\Rightarrow \tilde{U} = U$.

Aufgabe 34 (Eigenschaften des Annulators, 5 = 2 + 2 + 1 Punkte).
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U, U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Es bezeichne $i : V \to V^{**}$ den kanonischen Isomorphismus aus (22.18). Zeigen Sie:

(a) $U_1^0 + U_2^0 \subset (U_1 \cap U_2)^0$. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so gilt Gleichheit.
Hinweis für „$\supset$“: Ergänzen Sie eine Basis von $U \cap W$ geeignet und arbeiten Sie mit der dualen Basis.

(b) $i(U) \subset (U^0)^0$. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so gilt Gleichheit.

Sei nun W ein weiterer K-Vektorraum und $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

(c) Zeigen Sie die *Pullback-Formel*: $(f^*)^{-1}(U^0) = (f(U))^0$.

Lösung:

(a)
- „$\subset$“: Sei $\varphi \in U_1^0 + U_2^0$.
$\Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit $\varphi_1 \in U_1^0$, $\varphi_2 \in U_2^0$.

  Sei $u \in U_1 \cap U_2$.
$\Rightarrow \varphi(u) = \underbrace{\varphi_1(u)}_{\overset{\varphi_1 \in U_1^0, u \in U_1}{=} 0} + \underbrace{\varphi_2(u)}_{\overset{\varphi_2 \in U_2^0, u \in U_2}{=} 0} = 0.$

  $\Rightarrow \varphi \in (U_1 \cap U_2)^0$.
- „$\supset$“: Sei nun $\dim_K(V) < \infty$.

  Sei $(v_1, ..., v_k)$ Basis von $U_1 \cap U_2$. Sei $(v_1, ..., v_k, u_1, ..., u_r)$ Basis von U_1 und $(v_1, ..., v_k, w_1, ..., w_s)$ Basis von U_2.

Dimensionsformel $\Rightarrow (v_1,...,v_k,u_1,...,u_r,w_1,...,w_s)$ Basis von U_1+U_2. Ergänze zu einer Basis $(v_1,...,v_k,u_1,...,u_r,w_1,...,w_s,x_1,...,x_t)$ von V.

$\varphi \in (U_1 \cap U_2)^0 \Rightarrow \varphi = \sum_i \lambda_i u_i^* + \sum_i \mu_i w_i^* + \sum_i \alpha_i x_i^*$ mit $\alpha_i, \lambda_i, \mu_i \in K$.

$\Rightarrow \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ mit $\varphi_1 = \sum_i \mu_i w_i^* + \sum_i \alpha_i x_i^* \in U_1^0$, $\varphi_2 = \sum_i \lambda_i u_i^* \in U_2^0$

$\Rightarrow \varphi \in U_1^0 + U_2^0$.
Alternative (mit Dimensionsformel): Da bereits $U_1^0+U_2^0 \subset (U_1\cap U_2)^0$ gezeigt wurde, genügt es nun, $dim(U_1^0+U_2^0) = dim((U_1\cap U_2)^0)$ zu zeigen. Hier ist

$$\begin{aligned}
dim(U_1^0+U_2^0) &\overset{Dim.\text{-}Formel}{=} dim(U_1^0) + dim(U_2^0) - \underbrace{dim(U_1^0 \cap U_2^0)}_{\overset{P34}{=}(U_1+U_2)^0} \\
&= (dim(V) - dim(U_1)) + (dim(V) - dim(U_2)) \\
&\qquad -(dim(V) - dim(U_1+U_2)) \\
&= dim(V) - \underbrace{(dim(U_1) + dim(U_2) - dim(U_1+U_2))}_{\overset{Dim.\text{-}Formel}{=} dim(U_1\cap U_2)} \\
&= dim((U_1\cap U_2)^0).
\end{aligned}$$

(b)
- „$\subset$“: Sei $\psi \in i(U)$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $u \in U$ mit $\psi = i_u$.

  Wir wollen zeigen: $\psi \in (U^0)^0$.
  Sei $\varphi \in U^0$.
  $\Rightarrow \psi(\varphi) = i_u(\varphi) \overset{\text{Def. } i_u}{=} \varphi(u) \overset{\varphi\in U^0}{=} 0.$

  $\Rightarrow \psi \in (U^0)^0$.
- „$\supset$“: Sei nun $\dim_K(V) < \infty$.
  $\Rightarrow i : V \to V^{**}$ Isomorphismus, d.h. surjektiv.
  $\Rightarrow$ Es gibt $u \in V$ mit $\psi = i(u) = i_u$.
  Noch zu zeigen: $u \in U$ (dann $\psi = i(u) \in i(U)$).
  Angenommen, $u \in V\backslash U$.
  Sei $(u_1,...,u_k)$ eine Basis von $U \Rightarrow (u_1,...,u_k,u)$ ist linear unabhängig in V und kann zu Basis $(u_1,...,u_k,u,...)$ von V ergänzt werden. Sei $(u_1^*,...,u_k^*,u^*,...)$ die duale Basis.

  Sei $\varphi = u^*$. $\Rightarrow \varphi \in U^0 \overset{\psi\in(U^0)^0}{\Rightarrow} 0 = \psi(\varphi) \overset{\psi=i_u}{=} i_u(\varphi) = \varphi(u) \overset{\varphi=u^*}{=} 1$, Widerspruch.

  Also ist $u \in U$.
  Alternative (mit Dimensionsformel): Da bereits $i(U) \subset (U^0)^0$ gezeigt wurde, genügt es nun, $dim(i(U)) = dim((U^0)^0)$ zu zeigen. Hier ist

$$\begin{aligned}
dim(i(U)) &\overset{i\ Isom.}{=} dim(U) = \underbrace{dim(V)}_{=dim(V^*)} - \underbrace{(dim(V) - dim(U))}_{=dim(U^0)} \\
&= dim((U^0)^0).
\end{aligned}$$

(c)
- „$\subset$“: Sei $\psi \in (f^*)^{-1}(U^0)$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\varphi := f^*(\psi) \in U^0$.
  Zu zeigen ist $\psi \in (f(U))^0$.
  Sei $w \in f(U) \Rightarrow$ Es gibt $u \in U$ mit $w = f(u)$.
  $\Rightarrow \psi(w) = \psi(f(u)) = (\psi \circ f)(u) = (f^*(\psi))(u) = \varphi(u) \overset{\varphi \in U^0}{=} 0$.
  $\Rightarrow \psi \in (f(U))^0$.
- „$\supset$“: Sei $\psi \in (f(U))^0$. Zu zeigen ist: $\psi \in (f^*)^{-1}(U^0)$, d.h. $f^*(\psi) \in U^0$.
  Sei $u \in U$ beliebig.
  $\Rightarrow (f^*(\psi))(u) = (\psi \circ f)(u) = \psi(f(u)) \overset{f(u) \in f(U), \psi \in (f(U))^0}{=} 0$.
  $\Rightarrow f^*(\psi) \in U^0$.

Aufgabe 35 (Isomorphismen und Darstellungsformeln im Dual- und Bidualraum, 5 = 1 + 2 + 2 Punkte).

Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}^* = (v_1^*, ..., v_n^*)$ die duale Basis. Es seien $i : U \to U^{**}$ und $j : W \to W^{**}$ die Isomorphismen aus (22.18). Zeigen Sie:

(a) Für $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^n v_i^*(v) \cdot v_i$ und für $\varphi \in V^*$ gilt $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) \cdot v_i^*$.

(b) $i = \Psi_{\mathcal{B}^*} \circ \Psi_{\mathcal{B}}$

(c) Für $f^{**} := (f^*)^*$ gilt $f^{**} \circ i = j \circ f$. Nutzen Sie hierbei *keine* Basen.

Lösung:

(a)
- Sei $v \in V$
  $\overset{\mathcal{B} \text{ Basis von } V}{\Rightarrow}$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$
  $\Rightarrow$ Für $j \in \{1, ..., n\}$ gilt: $v_j^*(v) = v_j^*\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{v_j^*(v_i)}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j$.
  $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^n v_i^*(v) v_i$.
- Sei $\varphi \in V^*$.
  $\overset{\mathcal{B}^* \text{ Basis von } V^*}{\Rightarrow}$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $\varphi = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^*$
  $\Rightarrow$ Für $j \in \{1, ..., n\}$ gilt: $\varphi(v_j) = \Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^*\Big)(v_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{v_i^*(v_j)}_{=\delta_{ij}} = \lambda_j$.
  $\Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) v_i^*$.

(b) Zu zeigen ist $\underbrace{i}_{V \to V^{**}} = \underbrace{\Psi_{\mathcal{B}^*} \circ \Psi_{\mathcal{B}}}_{V \to V^{**}}$, d.h.
zu zeigen ist $\forall v \in V : \underbrace{i(v)}_{\in V^{**}} = \underbrace{(\Psi_{\mathcal{B}^*} \circ \Psi_{\mathcal{B}})(v)}_{\in V^{**}}$, d.h.
zu zeigen ist $\forall v \in V, \varphi \in V^* : \underbrace{[i(v)](\varphi)}_{\in K} = \underbrace{\big[(\Psi_{\mathcal{B}^*} \circ \Psi_{\mathcal{B}})(v)\big](\varphi)}_{\in K}$.

Sei $v \in V$, $\varphi \in V^*$.

- Linke Seite: $[i(v)](\varphi) = i_v(\varphi) = \varphi(v)$.

- Rechte Seite: Es ist

$$\begin{aligned}
(\Psi_{\mathcal{B}^*}\circ\Psi_{\mathcal{B}})(\underbrace{\quad v \quad}_{\overset{(a)}{=}\sum_{i=1}^n v_i^*(v)v_i})](\varphi) &= \Big[\Psi_{\mathcal{B}^*}\Big(\sum_{i=1}^n v_i^*(v)\,\underbrace{\Psi_{\mathcal{B}}(v_i)}_{=v_i^*}\Big)\Big](\varphi)\\
&= \Big[\sum_{i=1}^n v_i^*(v)\,\underbrace{\Psi_{\mathcal{B}^*}(v_i^*)}_{=v_i^{**}}\Big](\varphi)\\
&= \sum_{i=1}^n v_i^*(v)\quad \underbrace{v_i^{**}(\underbrace{\quad\varphi\quad}_{\overset{(b)}{=}\sum_{j=1}^n \varphi(v_j)v_j^*})}_{=\sum_{j=1}^n \varphi(v_j)\underbrace{v_i^{**}(v_j^*)}_{=\delta_{ij}}=\varphi(v_i)}\\
&= \sum_{i=1}^n v_i^*(v)\varphi(v_i) = \Big(\sum_{i=1}^n \varphi(v_i)v_i^*\Big)(v) \overset{(b)}{=} \varphi(v).
\end{aligned}$$

(c) Zu zeigen ist: $\underbrace{f^{**}\circ i}_{V\to W^{**}} = \underbrace{j\circ f}_{V\to W^{**}}$, d.h.
Zu zeigen ist: $\forall v\in V: \underbrace{(f^{**}\circ i)(v)}_{\in W^{**}} = \underbrace{(j\circ f)(v)}_{\in W^{**}}$, d.h.
Zu zeigen ist: $\forall v\in V, \varphi\in V^*: \underbrace{[(f^{**}\circ i)(v)](\varphi)}_{\in K} = \underbrace{[(j\circ f)(v)](\varphi)}_{\in K}$.

Sei $v\in V$, $\varphi\in V^*$.

- Rechte Seite: $[\underbrace{(j\circ f)(v)}_{=j(f(v))=j_{f(v)}}](\varphi) = \varphi(f(v))$.
- Linke Seite: Es ist

$$\begin{aligned}
[(f^{**}\circ i)(v)](\varphi) &= \big[f^{**}(\underbrace{i(v)}_{=i_v})\big](\varphi) = \big[i_v\circ f^*\big](\varphi)\\
&= i_v(f^*(\varphi)) = i_v(\varphi\circ f) = (\varphi\circ f)(v) = \varphi(f(v)).
\end{aligned}$$

Aufgabe 36 (Lineare Unabhängigkeit im Dualraum, 4 = 1 + 0.5 + 2.5 Bonuspunkte).
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim_K(V) = n\in\mathbb{N}$. Seien $\varphi_1,...,\varphi_n\in V^*$ Linearformen auf V. Sei $k\in\{1,...,n\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt:

$$\dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Kern}(\varphi_i)\Big) \geq n-k.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach k, die Dimensionsformel und P36(a).

(b) Für die lineare Abbildung $f: V\to K^k$, $v\mapsto(\varphi_1(v),...,\varphi_k(v))^t$ gilt:

$$\mathrm{Kern}(f) = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Kern}(\varphi_i).$$

(c) Die folgenden beiden Aussagen sind für $1\leq k\leq n$ äquivalent:

(i) $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ ist linear unabhängig in V^*.

(ii) Es gilt $\dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \text{Kern}(\varphi_i)\Big) = n - k$.

Hinweis: Nutzen Sie (a),(b) und die Rangformel für lineare Abbildungen $f : V \to W$, $g : W \to U$: Rang$(g \circ f) \geq$ Rang(f) + Rang$(g) -$ dim$_K(W)$.

Lösung:

(a) (a) $\Rightarrow \forall i \in \{1, ..., k\} : U_i := \text{Kern}(\varphi_i) \geq n - 1$.
Nachweis per vollständiger Induktion in k:

- IA: $k = 1$: $\dim_K(U_1) \geq n - 1$ nach (a). Gilt $\dim_K(U_1) \geq n - 1$
- IV: Die Aussage gelte für k.
- IS: Es gilt

$$\begin{aligned}
\dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^{k+1} U_i\Big) &= \dim_K\Big(U_{k+1} \cap \bigcap_{i=1}^{k} U_i\Big) \\
&\overset{\text{Dim.-Formel}}{=} \underbrace{\dim_K(U_{k+1})}_{\geq n-1} + \underbrace{\dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^{k} U_i\Big)}_{\overset{\text{IV}}{\geq} n-k} - \underbrace{\dim_K\Big(U_{k+1} + \bigcap_{i=1}^{k} U_i\Big)}_{\leq n} \\
&\geq (n-1) + (n-k) - n = n - (k+1).
\end{aligned}$$

(b) Es gilt $v \in \text{Kern}(f) \iff (\varphi_1(v), ..., \varphi_k(v)) = f(v) = 0 \iff \forall i = 1, ..., k : \varphi_i(v) = 0 \iff \forall i = 1, ..., k : v \in \text{Kern}(\varphi_i) \iff v \in \bigcap_{i=1}^k \text{Kern}(\varphi_i)$.

(c)
- „(i) $\Rightarrow$ (ii)“: Wir zeigen die Kontraposition. Sei $\dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \text{Kern}(\varphi_i)\Big) \neq n - k$.

  (d) $\Rightarrow \dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \text{Kern}(\varphi_i)\Big) \geq n - k$.
  $\Rightarrow \dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \text{Kern}(\varphi_i)\Big) > n - k$.
  $\Rightarrow \dim_K(\text{Kern}(f)) > n - k$.
  Dimensionsformel $\Rightarrow \text{Rang}(f) = \dim_K(V) - \dim_K(\text{Kern}(f)) < k$. Sei $U := \text{Bild}(f)$ $\Rightarrow \dim_K(U^0) = \dim_K(V) - \dim_K(U) > 0 \Rightarrow$ Es gibt $\psi = \tilde{x} \in U^0$ mit $x \in M(1 \times k, K)\backslash\{0\}$.

  $\Rightarrow \psi \circ f = 0$.

  $\Rightarrow$ Für alle $v \in V$ gilt: $0 = (\psi \circ f)(v) = x \cdot f(v) = \sum_{i=1}^k x_i \varphi_i(v)$
  $\Rightarrow \varphi_1, ..., \varphi_k$ sind linear abhängig in V^*.
- „(ii)$\Rightarrow$ (i)“: Sei $\dim_K(\bigcap_{i=1}^k \text{Kern}(\varphi_i)) = n - k$.
  $\Rightarrow$

  $$\dim_K\big(\text{Kern}(f)\big) \overset{(*)}{=} \dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \text{Kern}(\varphi_i)\Big) = n - k.$$

  Dimensionsformel $\Rightarrow \text{Rang}(f) = \dim_K(V) - \dim_K(\text{Kern}(f)) = k$.

  Seien $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i = 0$.
  Setze $g : K^k \to K, g(x) := (\lambda_1, ..., \lambda_k) \cdot x$.

$\Rightarrow g \circ f = 0$.
Rangformel (Hinweis), $g \circ f : V \to \mathbb{R}^k \Rightarrow 0 = \mathrm{Rang}(g \circ f) \geq \mathrm{Rang}(g) + \mathrm{Rang}(f) - k = \mathrm{Rang}(g)$.
$\Rightarrow g = 0 \Rightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$.
$\Rightarrow \varphi_1, ..., \varphi_k$ linear unabhängig in V^*.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **27. Juni 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`