Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

9. Abgabeblatt

Aufgabe 33	Aufgabe 34	Aufgabe 35	Aufgabe 36	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 33 (Charakterisierung von Linearformen/Annulatoren im Polynomraum, $6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1$ Punkte).

Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ der Polynome vom Grad höchstens 2 über $\mathbb{R}$, und den Standardvektorraum $W := \mathbb{R}^3$ über $\mathbb{R}$. Es bezeichne $E := (1, t, t^2)$ die Monombasis von V, und $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von W.

(a) Wir betrachten die Linearform $\varphi : V \to \mathbb{R}$, $\varphi(p) = p(0) + p(1) + p(2)$. Sei $g : W \to V$, $e_i \mapsto t^{i-1}$. Berechnen Sie $g^*(\varphi)$.

Sei $U := \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$ mit $v_1 := 1 - 2t, v_2 = 3t^2 - 3$ ein UVR von V.

(b) Berechnen Sie eine Basis von U^0 in Termen von E^*.

Gegeben sei nun die lineare Abbildung

$$f : V \to W, \quad f(p) := \Big(\int_0^1 p(t)dt, \int_0^1 p(-t)dt, \int_0^1 p(2t)dt \Big)^t.$$

(c) Berechnen Sie eine Basis (w_1, w_2) von $X := f(U)$, und berechnen Sie X^0 auf zwei verschiedene Weisen:

(i) Ergänzen Sie (w_1, w_2) zu einer Basis $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ von W und nutzen Sie $X^0 = \mathrm{Lin}(w_3^*)$.

(ii) Statten Sie W mit dem Standardskalarprodukt aus und berechnen Sie $X^0 = \Psi(X^\perp)$, wobei $\Psi : W \to W^*$ den zugehörigen kanonischen Isomorphismus bezeichnet.

(d) Ermitteln Sie U^0 aus X^0.
Hinweis: Nutzen Sie die Pullback-Formel aus A34(c).

(e) Zeigen Sie, dass $U = \{p \in V : \int_0^1 p(-t) + 2p(2t)dt = 0\}$.
Hinweis: Nutzen Sie P34(c).

Aufgabe 34 (Eigenschaften des Annulators, 5 = 2 + 2 + 1 Punkte).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $U, U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Es bezeichne $i : V \to V^{**}$ den kanonischen Isomorphismus aus (22.18). Zeigen Sie:

(a) $U_1^0 + U_2^0 \subset (U_1 \cap U_2)^0$. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so gilt Gleichheit.
Hinweis für „$\supset$“: Ergänzen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$ geeignet und arbeiten Sie mit der dualen Basis.

(b) $i(U) \subset (U^0)^0$. Ist $\dim_K(V) < \infty$, so gilt Gleichheit.

Sei nun W ein weiterer K-Vektorraum und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

(c) Zeigen Sie die *Pullback-Formel*: $(f^*)^{-1}(U^0) = (f(U))^0$.

Aufgabe 35 (Isomorphismen und Darstellungsformeln im Dual- und Bidualraum, 5 = 1 + 2 + 2 Punkte).

Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B}^* = (v_1^*, ..., v_n^*)$ die duale Basis. Es seien $i : V \to V^{**}$ und $j : W \to W^{**}$ die Isomorphismen aus (22.18). Zeigen Sie:

(a) Für $v \in V$ gilt $v = \sum_{i=1}^n v_i^*(v) \cdot v_i$ und für $\varphi \in V^*$ gilt $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi(v_i) \cdot v_i^*$.

(b) $i = \Psi_{\mathcal{B}^*} \circ \Psi_{\mathcal{B}}$

(c) Für $f^{**} := (f^*)^*$ gilt $f^{**} \circ i = j \circ f$. Nutzen Sie hierbei *keine* Basen.

Aufgabe 36 (Lineare Unabhängigkeit im Dualraum, 4 = 1 + 0.5 + 2.5 Bonuspunkte).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$. Seien $\varphi_1, ..., \varphi_n \in V^*$ Linearformen auf V. Sei $k \in \{1, ..., n\}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt:

$$\dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Kern}(\varphi_i)\Big) \geq n - k.$$

Hinweis: Verwenden Sie vollständige Induktion nach k, die Dimensionsformel und P36(a).

(b) Für die lineare Abbildung $f : V \to K^k$, $v \mapsto (\varphi_1(v), ..., \varphi_k(v))^t$ gilt:

$$\mathrm{Kern}(f) = \bigcap_{i=1}^k \mathrm{Kern}(\varphi_i).$$

(c) Die folgenden beiden Aussagen sind für $1 \leq k \leq n$ äquivalent:

(i) $(\varphi_1, ..., \varphi_k)$ ist linear unabhängig in V^*.

(ii) Es gilt $\dim_K\Big(\bigcap_{i=1}^k \mathrm{Kern}(\varphi_i)\Big) = n - k$.

Hinweis: Nutzen Sie (a),(b) und die Rangformel für lineare Abbildungen $f : V \to W$, $g : W \to U$: $Rang(g \circ f) \geq Rang(f) + Rang(g) - dim_K(W)$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **27. Juni 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`