UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

8. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 29	Aufgabe 30	Aufgabe 31	Aufgabe 32	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 29 (Existenz der Isometrie-Normalform, 6 = 1 + 2 + 1 + 2 Punkte).
Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum mit $n = \dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ und quadratische Polynome $q_1, ..., q_m \in \mathbb{R}[t]$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$, so dass $\chi_\varphi = (t-\lambda_1)\cdot ... \cdot(t-\lambda_r)\cdot q_1 \cdot ... \cdot q_m$.
Hinweis: Nutzen Sie den Fundamentalsatz der Algebra sowie P0.4.

(b) Es gibt einen UVR $W \subset V$ mit $\varphi(W) \subset W$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W) \in \{1, 2\}$.
Hinweis: Nutzen Sie (a) und machen Sie eine Fallunterscheidung $r > 0$ vs. $r = 0$. Im Fall $r = 0$ nutzen Sie Cayley-Hamilton, um zu zeigen, dass es $w \in V$, $i \in \{1, ..., m\}$ gibt mit $q_i(\varphi)(w) = 0$. Definieren Sie dann $W := Lin(w, \varphi(w))$.

(c) Ist φ zusätzlich eine Isometrie und $W \subset V$ ein UVR mit $\varphi(W) \subset W$, so ist auch $\varphi(W^\perp) \subset W^\perp$.

Sei nun φ eine Isometrie. Für $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ heißt die Matrix $A(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ein *Drehkästchen zum Winkel α*. φ befindet sich bzgl. einer ONB $\mathcal{B}$ von V in *Isometrie-Normalform*, falls es $r, s, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = r + s + 2k$ und $\alpha_1, ..., \alpha_k \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ gibt, so dass (bis auf die Reihenfolge der 1×1- bzw. 2×2-Blöcke auf der Diagonalen):

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & A(\alpha_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A(\alpha_k) \end{pmatrix}.$$

(d) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Es gibt stets eine ONB $\mathcal{B}$ von V, so dass φ bzgl. $\mathcal{B}$ in Isometrie-Normalform ist.
Hinweis: Sei W ein UVR aus (b). Betrachten Sie die Einschränkungen $\varphi_1 := \varphi\big|_W$ und $\varphi_2 := \varphi\big|_{W^\perp}$, bestimmen Sie für beide Abbildungen getrennt eine geeignete Basis und setzen Sie diese zu einer ONB von V zusammen.

Lösung:

(a) Fundamentalsatz der Algebra, $\chi_\varphi \in \mathbb{R}[t] \subset \mathbb{C}[t] \Rightarrow$ Es gibt Nullstelle $\lambda \in \mathbb{C}$ von χ_φ.

- Fall 1: $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \chi_\varphi = (t-\lambda) \cdot g$ mit $g \in \mathbb{R}[t]$, $\operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(\chi_\varphi) - 1$.

- Fall 2: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \overset{P0.4(d)}{\Rightarrow} \chi_\varphi = (t-\lambda)(t-\overline{\lambda}) \cdot g$ mit $g \in \mathbb{C}[t]$, $\operatorname{grad}(g) = \operatorname{grad}(\chi_\varphi) - 2$.
  Wegen $q := (t-\lambda)(t-\overline{\lambda}) = t^2 - (\lambda + \overline{\lambda}) + \lambda \cdot \overline{\lambda} \in \mathbb{R}[t]$ gilt sogar $g \in \mathbb{R}[t]$.

Induktiv folgt die Behauptung.

(b) Sei $\chi_\varphi = (t-\lambda_1) \cdot ... \cdot (t-\lambda_r) \cdot q_1 \cdot ... \cdot q_m \in \mathbb{R}[t]$ die Zerlegung aus (a).

- Fall $r > 0$:
  $\Rightarrow \lambda_1$ ist Eigenwert von φ zu einem EV $v_1 \in V$.
  $\Rightarrow W := \operatorname{Lin}(v_1)$ erfüllt $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$ und außerdem $\varphi(W) \subset W$, denn.
  Sei $x \in \varphi(W) \Rightarrow x = \varphi(v)$, $v \in W \Rightarrow$ Es gibt $\mu \in \mathbb{R}$ mit $v = \mu v_1 \Rightarrow x = \varphi(v) = \mu\varphi(v_1) = \mu\lambda v_1 \in W$.
- Fall $r = 0$: (Insbesondere hat φ keine Eigenwerte.)
  Cayley-Hamilton $\Longrightarrow q_1(\varphi) \circ ... \circ q_m(\varphi) = \chi_\varphi(\varphi) = 0$ (*).
  $\Rightarrow$ Es gibt $i \in \{1, ..., m\}$, so dass $q_i(\varphi)$ nicht injektiv ist. (Wären alle $q_i(\varphi)$ injektiv, wäre auch $q_1(\varphi) \circ ... \circ q_m(\varphi) = \chi_\varphi(\varphi)$ injektiv; Widerspruch zu (*)).
  $\Rightarrow$ Es gibt $w \in V \setminus \{0\}$, $i \in \{1, ..., m\}$ mit $q_i(\varphi)(w) = 0$.

  Setze $W := \operatorname{Lin}(w, \varphi(w))$.
  Sei $v \in W$ beliebig.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit $v = \mu_1 w + \mu_2 \varphi(w)$.
  $\Rightarrow \varphi(v) = \mu_1 \varphi(w) + \mu_2 \varphi(\varphi(w))$.
  $q_i(\varphi)(w) = 0 \overset{\text{schreibe } q_i = t^2 + bt + c}{\Rightarrow} \varphi(\varphi(w)) + b\varphi(w) + cw = 0 \Rightarrow \varphi(\varphi(w)) = -b\varphi(w) + cw \in W$.
  $\Rightarrow \varphi(v) = \mu_1 \varphi(w) + \mu_2 \varphi(\varphi(w)) \in W$.
  $\Rightarrow \varphi(W) \subset W$.

(c) φ Isometrie, $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty \overset{21.3}{\Longrightarrow} \varphi$ Isomorphismus. $\Rightarrow \varphi(W) = W$.
Sei $v \in W^\perp$.
Wir wollen zeigen: $\varphi(v) \in W^\perp$.
Sei $w \in W$ beliebig $\overset{\varphi(W)=W}{\Rightarrow} \varphi^{-1}(w) \in W$.
$\Rightarrow \langle \varphi(v), w \rangle = \langle \varphi(v), \varphi(\varphi^{-1}(w)) \rangle \overset{\varphi \text{ Isom.}}{=} \langle v, \varphi^{-1}(w) \rangle \overset{\varphi^{-1}(w) \in W, v \in W^\perp}{=} 0$.
$\Rightarrow \varphi(v) \in W^\perp$.

(d) Beweis durch vollständige Induktion nach $n := \dim_{\mathbb{R}}(V)$:

- Induktionsanfang $n = 0$: Nichts zu zeigen.
- Induktionsvoraussetzung (IV): Für jeden $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) \leq n-1$ gebe es geeignete ONB von V.
- Induktionsschritt:
  (b) $\Rightarrow$ Es gibt $W \subseteq V$ mit $\varphi(W) \subseteq W$ mit $\dim_{\mathbb{R}}(W) \in \{1, 2\}$. Im Falle $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$ hat φ keine Eigenvektoren in W.
  (c) $\Longrightarrow \varphi(W^\perp) \subseteq W^\perp$.
  Definiere

$$\varphi_1 := \varphi|_W : W \to W \quad \text{und} \quad \varphi_2 := \varphi|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp.$$

φ Isometrie $\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$ sind Isometrien.
$\dim_{\mathbb{R}}(W^\perp) \in \{n-2, n-1\}$, IV $\Rightarrow$ Es gibt ONB $\mathcal{C}$ von $W^\perp$, so dass $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi_2)$ Isometrie-Normalform besitzt.

- Fall 1: $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 1$: Sei $w \in W$ beliebig mit $\|w\| = 1 \overset{W \perp W^\perp}{\Rightarrow} \mathcal{B} := \{w\} \cup \mathcal{C}$ ist ONB von V.
  $\varphi(W) \subset W \Rightarrow$ Es gibt $\mu \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(w) = \mu \cdot w \Rightarrow w$ ist EV von $\varphi \overset{\varphi \text{ Isometrie}}{\Rightarrow}$ $\mu \in \{-1, +1\}$.
  $\Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{smallmatrix} \mu & 0 \\ 0 & M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi_2) \end{smallmatrix}\right)$ ist eine Isometrie-Normalform.
- Fall 2: $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Sei $\mathcal{D}$ eine ONB von W. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f := \Phi_{\mathcal{D}}^{-1} \circ \varphi_1 \circ \Phi_{\mathcal{D}}$.
  $\Rightarrow f$ Isometrie.
  $\Rightarrow f = \tilde{A}$ mit $A \in O(2)$ orthogonal.
  ϕ hat keinen Eigenvektor in $W \Rightarrow \varphi_1$ hat keinen Eigenvektor in $W \Rightarrow A$ hat keinen Eigenvektor in $\mathbb{R}^2 \overset{(21.11)}{\Rightarrow} A = A(\alpha)$ mit $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

  Wähle $\mathcal{B} := \mathcal{D} \cup \mathcal{C}$.
  $W \perp W^\perp \Rightarrow \mathcal{B}$ ist ONB von V, und
  $$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \left(\begin{smallmatrix} A(\alpha) & 0 \\ 0 & M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(\varphi_2) \end{smallmatrix}\right)$$
  ist eine Isometrie-Normalform.

Aufgabe 30 (Berechnung von Isometrie-Normalform und Anwendungen des Spektralsatzes, 6 = 2 + 1 + 1 + 2 Punkte).
Sei $V := \mathbb{R}^3$ der Euklidische Standardvektorraum (d.h. mit Standardskalarprodukt). Gegeben sei die Matrix
$$A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 3 & -4 \\ -6 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ -2 & -3 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(5).$$

(a) Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform von $\tilde{A} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ sowie eine Matrix $T \in \mathrm{O}(5)$, so dass $T^t A T$ in Isometrie-Normalform ist.
Hinweis: Nutzen Sie das Vorgehen aus P29.

Sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch.

(b) Zeigen Sie: Es gilt
$$A \text{ positiv (semi-)definit} \iff \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind (gleich oder) größer } 0.$$

(c) Sei A nun positiv semidefinit. Zeigen Sie: Es gibt eine positiv semidefinite Matrix $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $S^2 = A$.

(d) Sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{SO}(3)$ an, so dass $T^t A T$ diagonal ist und berechnen Sie S aus (c).

Lösung:

(a) Wir nutzen P29. Sei

$$B := \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte von B:

$$\begin{aligned}
\chi_B &= \det(tE_n - B) = \frac{1}{9^5}\det\begin{pmatrix} 9t+1 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 9t & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9t+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 9t & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 9t+4 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace S2}}{=} \frac{t}{9^4}\det\begin{pmatrix} 9t+1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 9t+4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 9t & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 9t+4 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Laplace S3}}{=} \frac{t^2}{9^3}\det\begin{pmatrix} 9t+1 & 2 & 2 \\ 2 & 9t+4 & 4 \\ 2 & 4 & 9t+4 \end{pmatrix} \\
&\overset{-Z2+Z3\to Z3}{=} \frac{t^2}{9^3}\det\begin{pmatrix} 9t+1 & 2 & 2 \\ 2 & 9t+4 & 4 \\ 0 & -9t & 9t \end{pmatrix} \\
&\overset{S3+S2\to S2}{=} \frac{t^2}{9^3}\det\begin{pmatrix} 9t+1 & 4 & 2 \\ 2 & 9t+8 & 4 \\ 0 & 0 & 9t \end{pmatrix} \\
&= 9^{-2}t^3 \det\det\begin{pmatrix} 9t+1 & 4 \\ 2 & 9t+8 \end{pmatrix} \\
&= t^4(t+1).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ EW von B sind $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$.
P29(a) (und $\cos(\alpha) = 0 \iff \alpha = \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow$ Die Isometrie-Normalform von A lautet

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & A(\frac{\pi}{2}) & \\ & & A(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 0 & -1 & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & 0 & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix} =: I$$

Bestimmung der ONB:
$\mathrm{Eig}(B,-1) = \mathrm{Kern}(-E_5 - B) \overset{\text{Rechnen}}{=} \mathrm{Lin}(v_0)$ mit $v_0 = (-\frac{1}{2}, 0, -1, 0, -1)^t$.
$\mathrm{Eig}(B,0) = \mathrm{Kern}(B) \overset{\text{Rechnen}}{=} \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

ONB von $\mathrm{Eig}(B,-1)$ ist $\frac{v_0}{\|v_0\|} = \frac{2}{3}v_0$.
Für $\lambda = 0$ haben wir 2 Drehkästchen. Wir nutzen zweimal P29(b):

- Sei $x = v_1 \Rightarrow Ax = \frac{1}{3}(-2, 0, 2, 0, -1)^t$.
  Gram-Schmidt liefert ONB
  $$(x_1, x_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$
  von $W_1 := \mathrm{Lin}(x, Ax)$.

- Wähle nun $y \in \mathrm{Eig}(B, 0) \cap \mathrm{Lin}(x, Ax)^\perp$, z.B. $y = v_3$.
  $\Rightarrow Ay = \frac{1}{3}(2, 0, 1, 0, -2)^t$.
  Gram-Schmidt liefert ONB
  $$(y_1, y_2) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$
  von $W_2 := \mathrm{Lin}(y, Ay)$.

Fasse Vektoren zusammen: $(\frac{v_0}{\|v_0\|}, x_1, x_2, y_1, y_2)$ ist ONB von $\mathbb{R}^5$ und es gilt mit

$$T := (\frac{v_0}{\|v_0\|}, x_1, x_2, y_1, y_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

dann $T^t A T = I$.

(b) Spektralsatz $\Rightarrow$ Es gibt eine ONB $(v_1, ..., v_n)$ aus Eigenvektoren von A mit zugehörigen EW $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$.
Sei $x \in \mathbb{R}^n$.
$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^n \mu_i v_i$ mit geeigneten $\mu_i \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$

$$Ax = \sum_{i=1}^n \mu_i A v_i = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i v_i$$

$\Rightarrow$

$$x^t A x = \sum_{j=1}^n \mu_j v_j^t \cdot \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i v_i = \sum_{i,j=1}^n \mu_i \mu_j v_j^t v_i \overset{(v_1,...,v_n) \text{ ONB}}{=} \sum_{i=1}^n \mu_i^2 \lambda_i . (*)$$

„$\Leftarrow$“: Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n > 0$.
$\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x^t A x \overset{(*)}{>} 0$.
„$\Rightarrow$“: Sei A positiv definit. Sei $i \in \{1, ..., n\}$ beliebig.
$(*) \Rightarrow 0 < v_i^t A v_i \overset{(*)}{=} \lambda_i$,
d.h. alle Eigenwerte sind positiv.

(c) Spektralsatz $\Rightarrow$ Es gibt $T \in O(n)$ mit $T^tAT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: D$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ von A.

Definiere $S := T \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}}_{=:D^{1/2}} T^t$.

$\Rightarrow S^2 = TD^{1/2} \underbrace{T^tT}_{=E_n} D^{1/2}T^t = T \underbrace{D^{1/2}D^{1/2}}_{=D} T^t = A$.

S ist offensichtlich symmetrisch und positiv (semi-)definit, da es die Eigenwerte $\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n} \geq 0$ besitzt.

(d) Wir berechnen die EW von A:

$$\begin{aligned}
\chi_A &= \det(tE_3 - A) = \det \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{pmatrix} \\
&\overset{-Z2+Z3 \to Z3}{=} \det \begin{pmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ 0 & 1-t & t-1 \end{pmatrix} \\
&\overset{S3+S2 \to S2}{=} \det \begin{pmatrix} t-2 & -2 & -1 \\ -1 & t-3 & -1 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} = (t-1) \cdot \det \begin{pmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{pmatrix} \\
&= ... = (t-4) \cdot (t-1)^2.
\end{aligned}$$

$\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, 4\}$ sind die Eigenwerte von A.
Eigenraum zu 4:

$$\mathrm{Eig}(A, 4) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}((1,1,1)^t) =: \mathrm{Lin}(\tilde{w}_1).$$

Eigenraum zu 1.

$$\mathrm{Eig}(A, 2) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) =: \mathrm{Lin}(v_2, v_3).$$

Orthogonalisieren von v_2, v_3 mit Gram-Schmidt liefert ONB

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)^t, \quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)^t.$$

Normalisieren von w_1: $w_1 = \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^t$.

$$\Rightarrow T := (w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \text{ erfüllt } T^tAT = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\det(T) = ... = 1$, d.h. $T \in SO(3)$.
(Wäre $\det(T) = -1$ gewesen, hätte man einfach erste Spalte von T mit (-1) multiplizieren müssen).

Angabe S: Definiere

$$S \;:=\; T\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}T^t = ... = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 31 (Berechnung dualer Basis im $\mathbb{R}^3$, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ Basen von V. Es bezeichne $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$ die entsprechenden dualen Basen von V^*.

(a) Zeigen Sie: $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = ((T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^t)^{-1}$.
Hinweis: Stellen Sie a_j mittels $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ durch b_l dar, sowie a_i^* mittels $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ durch b_k^*. Berechnen Sie dann $a_i^*(a_j)$ auf zwei verschiedene Weisen.

Sei nun $V := \mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum über $K = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} := (b_1, b_3, b_3)$ gegeben durch

$$b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie explizit die duale Basis $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$, d.h., geben Sie Zeilenvektoren $w_i \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an mit $b_i^* = \tilde{w}_i$.

(c) Sei $a := (1, 3, 1)^t$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v, a\rangle$. Schreiben Sie φ als Linearkombination der dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Lösung:

(a) Sei $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$.
Es genügt zu zeigen, dass $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^t = E_n$.

In den Spalten der Transformationsmatrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ stehen die Koordinatenvektoren von a_j bzgl. der Basis $\mathcal{B}$. $\Rightarrow a_j = \sum_{l=1}^n (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})_{lj} b_l$.
Analog: $a_i^* = \sum_{k=1}^n (T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})_{ki} b_k^*$.

Damit folgt für $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned}
(E_n)_{ij} \quad &= \quad \delta_{ij} = a_i^*(a_j) = \left(\sum_{k=1}^n (T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})_{ki} b_k^*\right)\left(\sum_{l=1}^n (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})_{lj} b_l\right)\\
&\overset{\text{Def. + lin. Abb.}}{\underset{b_k^* \text{ linear}}{=}} \quad \sum_{k,l=1}^n (T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})_{ki} (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})_{lj} \underbrace{b_k^*(b_l)}_{=\delta_{kl}}\\
&= \quad \sum_{k=1}^n (T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*})_{ki} \underbrace{(T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})_{kj}}_{=((T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^t)_{jk}}\\
&= \quad \left(T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} \cdot (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^t\right)_{ij}.
\end{aligned}$$

Es folgt $E_n = T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} \cdot (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^t$.

(b) Möglichkeit 1 (nutze (a)): Es sei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. $\Rightarrow$

$$T_E^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) $\Rightarrow T_{E^*}^{\mathcal{B}^*} = ((T_E^{\mathcal{B}})^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = ... = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$
$\Rightarrow b_1^* = e_1^* - e_3^* = \tilde{e_1^t} - \tilde{e_3^t} = \tilde{w}_1$ mit $w_1 = (1, 0, -1)$.
$b_2^* = \tilde{w}_2$, $b_3^* = \tilde{w}_3$ mit $w_2 = (-1, 1, 2)$, $w_3 = (1, -1, -1)$.

Möglichkeit 2 (”direkt”): Bestimme $M_{e_1}^E(b_1^*) = M_{e_1}^{\mathcal{B}}(b_1^*) \cdot T_{\mathcal{B}}^E = \underbrace{M_{e_1}^{\mathcal{B}}(b_1^*)}_{\substack{\text{Def. } b_1^* \\ =(1,0,0)}} \cdot \underbrace{(T_E^{\mathcal{B}})^{-1}}_{= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} = (1, 0, -1) =: w_1$.

Analog: $w_2 = (-1, 1, 2)$, $w_3 = (1, -1, -1)$.

(c) Es ist
$$M_{e_1}^E(\varphi) = (1, 3, 1).$$
$\Rightarrow$
$$M_{e_1}^{\mathcal{B}}(\varphi) = M_{e_1}^E(\varphi) \cdot T_E^{\mathcal{B}} = (1, 3, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (4, 2, -1).$$
$\Rightarrow \varphi = 4b_1^* + 2b_2^* - b_3^*$.

Aufgabe 32 (Isometrie als Produkt von Spiegelungen, 6 Bonuspunkte).
Sei $(\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$ der Euklidische Standardraum. Zeigen Sie, dass sich jede Isometrie $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ als Komposition von höchstens n Spiegelungen darstellen lässt.

Lösung:

Wird in der Vorlesung besprochen (s. Skript).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Mittwoch, den **19. Juni 2019, 16:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`