UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

8. Abgabeblatt

Aufgabe 29	Aufgabe 30	Aufgabe 31	Aufgabe 32	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 29 (Existenz der Isometrie-Normalform, $6 = 1 + 2 + 1 + 2$ Punkte).
Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum mit $n = \dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$ und $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ und quadratische Polynome $q_1, ..., q_m \in \mathbb{R}[t]$ ohne Nullstellen in $\mathbb{R}$, so dass $\chi_\varphi = (t - \lambda_1) \cdot ... \cdot (t - \lambda_r) \cdot q_1 \cdot ... \cdot q_m$.
Hinweis: Nutzen Sie den Fundamentalsatz der Algebra sowie P0.4.

(b) Es gibt einen UVR $W \subset V$ mit $\varphi(W) \subset W$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W) \in \{1, 2\}$.
Hinweis: Nutzen Sie (a) und machen Sie eine Fallunterscheidung $r > 0$ vs. $r = 0$. Im Fall $r = 0$ nutzen Sie Cayley-Hamilton, um zu zeigen, dass es $w \in V$, $i \in \{1, ..., m\}$ gibt mit $q_i(\varphi)(w) = 0$. Definieren Sie dann $W := Lin(w, \varphi(w))$.

(c) Ist φ zusätzlich eine Isometrie und $W \subset V$ ein UVR mit $\varphi(W) \subset W$, so ist auch $\varphi(W^\perp) \subset W^\perp$.

Sei nun φ eine Isometrie. Für $\alpha \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ heißt die Matrix $A(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ein *Drehkästchen zum Winkel α*. φ befindet sich bzgl. einer ONB $\mathcal{B}$ von V in *Isometrie-Normalform*, falls es $r, s, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n = r + s + 2k$ und $\alpha_1, ..., \alpha_k \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ gibt, so dass (bis auf die Reihenfolge der 1×1- bzw. 2×2-Blöcke auf der Diagonalen):

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} E_r & & & & \\ & -E_s & & & \\ & & A(\alpha_1) & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & A(\alpha_k) \end{pmatrix}.$$

(d) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$: Es gibt stets eine ONB $\mathcal{B}$ von V, so dass φ bzgl. $\mathcal{B}$ in Isometrie-Normalform ist.
Hinweis: Sei W ein UVR aus (b). Betrachten Sie die Einschränkungen $\varphi_1 := \varphi\big|_W$ und $\varphi_2 := \varphi\big|_{W^\perp}$, bestimmen Sie für beide Abbildungen getrennt eine geeignete Basis und setzen Sie diese zu einer ONB von V zusammen.

Aufgabe 30 (Berechnung von Isometrie-Normalform und Anwendungen des Spektralsatzes, 6 = 2 + 1 + 1 + 2 Punkte).

Sei $V := \mathbb{R}^3$ der Euklidische Standardvektorraum (d.h. mit Standardskalarprodukt). Gegeben sei die Matrix

$$A := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 & 6 & -2 \\ 6 & 0 & -6 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & -4 & 3 & -4 \\ -6 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ -2 & -3 & -4 & -6 & -4 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(5).$$

(a) Bestimmen Sie die Isometrie-Normalform von $\tilde{A} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ sowie eine Matrix $T \in \mathrm{O}(5)$, so dass T^tAT in Isometrie-Normalform ist.
Hinweis: Nutzen Sie das Vorgehen aus P29.

Sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch.

(b) Zeigen Sie: Es gilt

$$A \text{ positiv (semi-)definit} \iff \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind (gleich oder) größer } 0.$$

(c) Sei A nun positiv semidefinit. Zeigen Sie: Es gibt eine positiv semidefinite Matrix $S \in M(n \times n, \mathbb{R})$ mit $S^2 = A$.

(d) Sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{SO}(3)$ an, so dass T^tAT diagonal ist und berechnen Sie S aus (c).

Aufgabe 31 (Berechnung dualer Basis im $\mathbb{R}^3$, 4 = 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $\mathcal{A} = (a_1, ..., a_n)$, $\mathcal{B} = (b_1, ..., b_n)$ Basen von V. Es bezeichne $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$ die entsprechenden dualen Basen von V^*.

(a) Zeigen Sie: $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*} = ((T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}})^t)^{-1}$.
Hinweis: Stellen Sie a_j mittels $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ durch b_l dar, sowie a_i^* mittels $T_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{A}^*}$ durch b_k^*. Berechnen Sie dann $a_i^*(a_j)$ auf zwei verschiedene Weisen.

Sei nun $V := \mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum über $K = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} := (b_1, b_3, b_3)$ gegeben durch

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad b_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad b_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Bestimmen Sie explizit die duale Basis $\mathcal{B}^* = (b_1^*, b_2^*, b_3^*)$, d.h., geben Sie Zeilenvektoren $w_i \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an mit $b_i^* = \tilde{w}_i$.

(c) Sei $a := (1, 3, 1)^t$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \langle v, a \rangle$. Schreiben Sie φ als Linearkombination der dualen Basis $\mathcal{B}^*$.

Aufgabe 32 (Isometrie als Produkt von Spiegelungen, 6 Bonuspunkte).

Sei $(\mathbb{R}^n, \langle ., . \rangle)$ der Euklidische Standardraum. Zeigen Sie, dass sich jede Isometrie $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ als Komposition von höchstens n Spiegelungen darstellen lässt.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Mittwoch, den **19. Juni 2019, 16:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`