UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

7. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 25	Aufgabe 26	Aufgabe 27	Aufgabe 28	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 25 (Orthogonale Komplemente in ∞-dim. Euklidischen Räumen, 6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(V, \langle ., . \rangle)$ ein Euklidischer Raum (nicht notwendig endlichdimensional) und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(b) $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$. Ist zusätzlich $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$, so gilt Gleichheit.
Hinweis: Nutzen Sie, dass im Falle $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty$ für UVR $X \subset V$ gilt: $X = (X^\perp)^\perp$.

Sei nun $V := C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\} \subset \mathrm{Abb}([0,1], \mathbb{R})$ der Untervektorraum der stetigen Funktionen. Zusammen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ ist V ein ∞-dimensionaler Euklidischer Raum. Gegeben sei weiter $c \in (0,1)$, und der Untervektorraum

$$U := \{f \in V | \forall x \in [c,1] : f(x) = 0\}$$

von V.

(c) Geben Sie $U^\perp$ explizit als Menge an und zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = U$ gilt.
Hinweis: Für $g \in U^\perp$ definieren Sie $f \in U$ mit $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [c,1], \\ (c-x) \cdot g(x), & x \in [0,c) \end{cases}$.
Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Multiplikation und Addition von stetigen Funktionen wieder stetig ist und für eine stetige Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in [a,b] : h(x) \geq 0$ gilt: $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow h = 0$.

(d) Zeigen Sie $V \neq U \oplus U^\perp$ am Beispiel der konstanten Funktion $f \equiv 1$.

(e) Zeigen Sie, dass (b) im Allgemeinen nicht gelten muss, indem Sie $W := U^\perp$ wählen.

Lösung:

(a)
- „$\subset$“: Sei $v \in (U+W)^\perp$.
  Wir zeigen $v \in U^\perp$ ($v \in W^\perp$ geht analog).
  Sei $u \in U$ beliebig.
  $\Rightarrow u \in U + W$.
  $\overset{v\in(U+W)^\perp}{\Rightarrow} \langle v, u\rangle = 0$.
  $\Rightarrow v \in U^\perp$.
- „$\supset$“: Sei $v \in U^\perp \cap W^\perp$.
  Sei $x \in U + W$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $u \in U$, $w \in W$ mit $x = u + w$.
  $\Rightarrow \langle v, x\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle \overset{v\in U^\perp, v\in W^\perp}{=} 0 + 0 = 0$.
  $\Rightarrow v \in (U+W)^\perp$.

(b) „$U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$“: Sei $v \in U^\perp + W^\perp$.
$\Rightarrow$ Es gibt $v_1 \in U^\perp$, $v_2 \in W^\perp$ mit $v = v_1 + v_2$.
Sei $u \in U \cap W$ beliebig.
$\Rightarrow$

$$\langle u, v\rangle = \underbrace{\langle u, v_1\rangle}_{=0 \text{ (da } u\in U, v_1\in U^\perp)} + \underbrace{\langle u, v_2\rangle}_{=0 \text{ (da } u\in W, v_2\in W^\perp)} = 0.$$

$\Rightarrow v \in (U \cap W)^\perp$.

Sei nun $\dim_\mathbb{R}(V) < \infty$.
$\Rightarrow$ Für einen UVR $X \subset V$ gilt $X = (X^\perp)^\perp$ $(*)$. Dann folgt

$$(U^\perp + W^\perp)^\perp \overset{\text{(a)}}{=} (U^\perp)^\perp \cap (W^\perp)^\perp \overset{(*)}{=} U \cap W.$$

Anwenden von $\perp$ auf beiden Seiten $\Rightarrow$

$$U^\perp + W^\perp \overset{(*)}{=} \left((U^\perp + W^\perp)^\perp\right)^\perp \overset{\text{(a)},(*)}{=} (U \cap W)^\perp.$$

(c) Es gilt:

$$g \in U^\perp \iff \forall f \in U : 0 = \langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx = \int_0^c f(x)g(x)dx \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ Vermute $W := \{g \in V | \forall x \in [0,c] : g(x) = 0\} \overset{!}{=} U^\perp$.
Beweis:

- „$W \subset U^\perp$“: Klar wegen $(*)$.
- „$U^\perp \subset W$“: Sei $g \in U^\perp$. Verwende den Hinweis und betrachte $f \in V$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [c,1], \\ (c-x)\cdot g(x), & x \in [0,c) \end{cases}.$$

  $\Rightarrow f \in U$.
  $\overset{(*)}{\Rightarrow} 0 = \int_0^c \underbrace{(c-x)g(x)^2}_{\geq 0} dx$.
  $\overset{x\mapsto(c-x)g(x)^2 \text{ stetig}}{\Rightarrow} \forall x \in [0,c] : \underbrace{(c-x)}_{>0 (\text{ falls } x \neq c)} g(x)^2 = 0$.
  $\Rightarrow \forall x \in [0,c) : g(x) = 0$.
  g stetig $\Rightarrow \forall x \in [0,c] : g(x) = 0$.
  $\Rightarrow g \in W$.

Analoges Vorgehen wie oben, nur mit

$$g(x) := \begin{cases} (x-c)f(x), & x > c, \\ 0, & x \leq c \end{cases}$$

für gegebenes $f \in U^\perp$ zeigt $(U^\perp)^\perp = U$.

(d) Sei $h \equiv 1$. Angenommen es gäbe $f \in U$, $g \in U^\perp$ mit $h = f + g$.
$\Rightarrow 1 = h(c) = f(c) + g(c)$.
Aber $f(c) = 0 = g(c)$, Widerspruch!

(e) Es gilt $U \cap U^\perp = \{0\}$, denn:
Sei $g \in U \cap U^\perp$.
$\Rightarrow \forall\, x \in [0, c] : g(x) = 0$ und $\forall\, x \in [c, 1] : g(x) = 0$.
$\Rightarrow g = 0$ auf $C[0, 1]$.
$\Rightarrow (U \cap U^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = V$. Aber $U^\perp + (U^\perp)^\perp = U^\perp + U \overset{\text{(d)}}{\neq} V$.

Aufgabe 26 (Isometrien auf $\mathbb{R}^2$, 5 = 1 + 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).
Wir betrachten den Standardvektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Gegeben seien die Abbildungen $\varphi_i = \tilde{B}_i \in \operatorname{End}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2)$, wobei

$$B_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei weiter $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass φ_1 eine Isometrie auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$ ist, aber nicht auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$.

(b) Zeigen Sie, dass φ_2 eine Isometrie auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ ist, aber nicht auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$.

(c) Geben Sie alle möglichen Isometrien $\varphi \in \operatorname{End}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2)$ mit $\det(\varphi) = 1$ auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ an (d.h geben sie alle möglichen $B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ an mit $\varphi = \tilde{B}$).
Hinweis: Verwenden Sie (21.11).

(d) Bestimmen Sie alle möglichen Skalarprodukte $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$ auf $\mathbb{R}^2$, so dass φ_3 eine Isometrie auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ ist (d.h. geben Sie die zugehörigen Matrizen $C \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ an).
Hinweis: Verwenden Sie A27(a).

Lösung:

(a) (e_1, e_2) ist ONB von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$, $M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)}(\varphi_1) = B_1$.
$B_1^t \cdot B_1 = E_2 \Rightarrow B_1$ ist orthogonal.
Vorlesung $\Rightarrow \varphi_1$ Isometrie von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$ in sich.
Es gilt $\|e_1\|_A^2 = e_1^t A e_1 = 1$, aber $\|\varphi_1(e_1)\|_A^2 = \frac{1}{25}\|(3,4)^t\|_A^2 = \frac{1}{25}(3,4)A(3,4)^t = \frac{65}{25} = \frac{13}{5}$, d.h. $\|e_1\|_A^2 \neq \|\varphi_1(e_1)\|_A^2$.
$\Rightarrow \varphi_1$ keine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ in sich.

(b) Bestimme ONB von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ mit Gram-Schmidt aus Basis (e_1, e_2): $\tilde{w}_1 = e_1$
$\Rightarrow w_1 = \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|_A} = (1, 0)^t$.
$\tilde{w}_2 = e_2 - \langle e_2, w_1\rangle_A w_1 = (1, 1)^t$.

$\Rightarrow w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|_A} = \frac{1}{2}(1,1)^t$.
$\Rightarrow \mathcal{B} = (w_1, w_2)$ ist ONB von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$, und

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2) &= (T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)})^{-1} M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)}(\varphi_2) T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2)^t M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2) = E_2 \Rightarrow M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2)$ orthogonal $\Rightarrow \varphi_2$ Isometrie von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ in sich.

Es gilt $\|e_1\|^2_{E_2} = e_1^t e_1 = 1$, aber $\|\varphi_2(e_1)\|^2_{E_2} = \frac{1}{8}\|(2,4)^t\|^2_{E_2} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$, d.h. $\|e_1\|^2_{E_2} \neq \|\varphi_2(e_1)\|^2_{E_2}$.
$\Rightarrow \varphi_2$ keine Isometrie von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$ in sich.

(c) φ Isometrie von $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ in sich $\overset{\mathcal{B} \text{ ONB von } (\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)}{\iff} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$ orthogonal $\overset{(21.11),\det(\varphi)=1}{\iff}$
$\exists \alpha \in [0, 2\pi) : M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$.
$\iff \exists \alpha \in [0, 2\pi)$:

$$\begin{aligned} M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2)}(\varphi) &= T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) (T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) + \frac{1}{2}\sin(\alpha) & -\frac{5}{2}\sin(\alpha) \\ \frac{1}{2}\sin(\alpha) & \cos(\alpha) - \frac{1}{2}\sin(\alpha) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) A28 (a) $\Rightarrow A$ muss symmetrisch positiv definit sein und $B^t AB = A$ erfüllen.
A symmetrisch $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
$B^t AB = A \iff \begin{pmatrix} c & -b+c \\ -b+c & a-2b+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \iff a = c, a = 2b.$
$\Rightarrow A = b \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
A positiv definit $\Rightarrow b > 0$.
Man sieht leicht, dass für alle $b > 0$ durch $A(b) := b \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ tatsächlich ein Skalarprodukt mit der Eigenschaft $B^t A(b) B^t = A(b)$ definiert wird.

Aufgabe 27 (Charakterisierung von Isometrien, 5 = 2 + 3 Punkte).
Sei $\mathbb{R}^n$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch positiv definit. Sei $f = \tilde{B}$ mit $B \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie:

$$f \text{ Isometrie in } (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_A) \quad \iff \quad B^t AB = A.$$

Es sei nun $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)\backslash\{0\}$.

(b) Zeigen Sie

$$\begin{array}{c}\forall v \in V, \forall \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \text{ Isometrie}: \\ \|f(v)\| = \|(f \circ \psi)(v)\|\end{array} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists G \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \text{ Isometrie} : f = \lambda \cdot G.$$

Hinweis: Betrachten Sie Abbildungen $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, welche die Elemente einer Orthonormalbasis von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ geeignet permutiert, und nutzen Sie P28(a).

Lösung:

(a)

- „⇒“: f Isometrie $\Rightarrow$ Für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$(B^tAB)_{ij} = e_i^t B^t A B e_j = \langle Be_i, Be_j \rangle_A = \langle f(e_i), f(e_j) \rangle_A = \langle e_i, e_j \rangle_A = e_i^t A e_j = A_{ij}.$$

$\Rightarrow B^tAB = A.$

- „⇐“: Es gelte $B^tAB = A$
$\overset{\text{wie oben}}{\Rightarrow} \langle f(e_i), f(e_j) \rangle_A = ... = \langle e_i, e_j \rangle_A$ (*).
Sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig $\Rightarrow v = \sum_{i=1}^n v_i e_i \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_A^2 &= \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) \Big\|_A^2 = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \langle f(e_i), f(e_j) \rangle_A \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle_A = \Big\| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \Big\|_A^2 = \|v\|_A^2. \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ Isometrie in $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_A)$.

Alternativ: Mit Äquivalenzen: Seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Dann gilt:

$$\langle f(x), f(y) \rangle_A = \langle Bx, By \rangle_A = x^t B^t A B y,$$

und

$$\langle x, y \rangle_A = x^t A y.$$

Daher: f Isometrie $\iff \forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $x^t B^t A B y = x^t A y \overset{x=e_i, y=e_j}{\iff} B^t A B = A$.

(b)

- „⇒“: Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine ONB von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.
Für $i = 1, ..., n$ sei ψ_i die lineare Abbildung mit $\psi_i : V \to V, v_1 \mapsto v_i$, welche die restlichen Vektoren v_j $(j = 2, ..., n)$ beliebig untereinander permutiert.
P28(a) ((iv) $\Rightarrow$ (i)) $\Rightarrow \psi_i$ ist Isometrie.
$\Rightarrow$

$$\|f(v_1)\| = \|f(\psi_i(v_1))\| = \|f(v_i)\|.$$

Definiere $\lambda := \|f(v_1)\|$.
$f \neq 0 \Rightarrow f(v_i) \neq 0$ für mindestens ein $i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \lambda \neq 0$.
Definiere $G := \frac{1}{\lambda} \cdot f$ ($\Rightarrow f = \lambda \cdot G$).

Wir zeigen nun, dass G eine Isometrie ist mittels P28(a) ((iv) $\Rightarrow$ (i)) und der ONB $(v_1, ..., v_n)$.

Sei $i \in \{1, ..., n\} \Rightarrow \|G(v_i)\| = \frac{1}{\lambda}\|f(v_i)\| = 1$.

Seien $i, j \in \{1, ..., n\}$, $i \neq j$. OBdA $i = 1$, $j = 2$.
$\Rightarrow (w_1, ..., w_n) := (\frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 + v_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(v_1 - v_2), v_3, ..., v_n)$ ist auch ONB, denn:

– $\|w_1\|^2 = \frac{1}{2}(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2) = 1$, analog $\|w_2\|^2 = 1$ und $\|w_i\|^2 = \|v_i\|^2 = 1$ für $i = 3, ..., n$.
– $\langle w_1, w_2 \rangle = \|v_1\|^2 - \|v_2\|^2 = 0$
– Für $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{3, ..., n\}$ gilt $\langle w_i, w_j \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle v_1, v_j \rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\langle v_2, v_j \rangle \overset{(v_1,...,v_n) \text{ ONB}}{=} 0$.

Sei $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ die Isometrie mit $\psi(v_i) = w_i$ $(i = 1, ..., n)$.
$\Rightarrow \|f(v_1)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f(v_1) + f(v_2)\|$, $\|f(v_2)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|f(v_1) - f(v_2)\|$.

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \langle f(v_1), f(v_2) \rangle &= \frac{1}{4}(\|f(v_1) + f(v_2)\|^2 - \|f(v_1) - \varphi(v_2)\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(2\|f(v_1)\|^2 - 2\|f(v_2)\|^2) = \frac{1}{2}(\lambda - \lambda) = 0. \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle G(v_1), G(v_2) \rangle = \frac{1}{\lambda^2}\langle f(v_1), f(v_2) \rangle = 0$.
$\Rightarrow (G(v_1), ..., G(v_n))$ ist ONB
P28(a) $\Rightarrow G$ ist Isometrie.

- „$\Leftarrow$“: Sei $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ eine Isometrie.
  Vorlesung, G Isometrie $\Rightarrow G \circ \psi$ ist Isometrie
  Sei $v \in V$ beliebig. $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \|(f \circ \psi)(v)\| &= \|\lambda \cdot (G \circ \psi)(v)\| = |\lambda| \cdot \|(G \circ \psi)(v)\| \overset{G\circ\psi \text{ Isometrie}}{=} |\lambda| \cdot \|v\| \\ &\overset{G \text{ Isometrie}}{=} |\lambda| \cdot \|G(v)\| = \|\lambda \cdot G(v)\| = \|f(v)\|. \end{aligned}$$

Aufgabe 28 (Charakterisierung von Bewegungen, 4 = 1 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5 Bonuspunkte).

Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ Euklidische Räume (nicht notwendig endlichdimensional) mit induzierten Normen $\|\cdot\|_W$, $\|\cdot\|_V$. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall v_1, v_2 \in V : \langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$$

(a) Zeigen Sie: f ist eine Isometrie (d.h. f ist linear).

Eine Abbildung $f : V \to V$ heißt *Bewegung*, falls für alle $u, v \in V$: $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$. Zeigen Sie:

(b) Für jedes $w \in V$ ist die Translation $T_w : V \to V, v \mapsto v + w$ eine Bewegung.

(c) Ist $g : V \to V$ eine Isometrie, so ist auch $T_w \circ g$ eine Bewegung.

(d) Ist f eine Bewegung und $f(0) = 0$, so ist f eine Isometrie.
Hinweis: Nutzen Sie (a).

(e) Zu jeder Bewegung f von V existiert eine Isometrie $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ und $w \in V$ mit $f = T_w \circ g$. Ist diese Darstellung für $V \neq \{0\}$ eindeutig?

Lösung:

(a) Seien $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& \|f(\lambda v+u)-\lambda f(v)-f(u)\|_W^2 \\
= \quad & \langle f(\lambda v+u)-\lambda f(v)-f(u), f(\lambda v+u)-\lambda f(v)-f(u)\rangle \\
\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle_W \text{ linear}}{=} \quad & \|f(\lambda v+u)\|_W^2+\lambda^2\|f(v)\|_W^2+\|f(u)\|_W^2 \\
& \qquad -2\lambda\langle f(\lambda v+u), f(v)\rangle_W-2\langle f(\lambda v+u), f(u)\rangle_W+2\lambda\langle f(v), f(u)\rangle_W \\
\overset{\text{Vorauss.}}{=} \quad & \|\lambda v+u\|_V^2+\lambda^2\|v\|_V^2+\|u\|_V^2 \\
& \qquad -2\lambda\langle\lambda v+u, v\rangle_V-2\langle\lambda v+u, u\rangle_V+2\lambda\langle v, u\rangle_V \\
\overset{\langle\cdot,\cdot\rangle_V \text{ linear}}{=} \quad & \left(\lambda^2\|v\|_V^2+2\lambda\langle v, u\rangle_V+\|u\|_V^2\right)+\lambda^2\|v\|_V^2+\|u\|_V^2 \\
& \qquad -2\lambda\left[\lambda\|v\|_V^2+\langle u, v\rangle_V\right]-2\left[\lambda\langle v, u\rangle_V+\|u\|_V^2\right]+2\lambda\langle v, u\rangle_V \\
= \quad & 0.
\end{aligned}$$

$\|\cdot\|_W$ definit $\Rightarrow f(\lambda v+u)-\lambda f(v)-f(u)=0 \Rightarrow f(\lambda v+u)=\lambda f(v)+f(u)$.
$\Rightarrow f$ linear.

(b) Seien $u, v \in V$ beliebig $\Rightarrow$

$$\|T_w(u)-T_w(v)\|=\|(u+w)-(v+w)\|=\|u-v\|.$$

$\Rightarrow T_w$ Bewegung.

(c) Seien $u, v \in V$ beliebig $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\|(T_w\circ g)(u)-(T_w\circ g)(v)\| \quad &= \quad \|T_w(g(u))-T_W(g(v))\| \overset{T_w \text{ Bewegung}}{=} \|g(u)-g(v)\| \\
&\overset{g \text{ lin.}}{=} \quad \|g(u-v)\| \overset{g \text{ Isom.}}{=} \|u-v\|.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow T_w \circ g$ Bewegung.

(d) Für beliebiges $v_1, v_2 \in V$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle f(v_1), f(v_2)\rangle_W \quad &= \quad \frac{1}{2}\Big[\|f(v_1)\|_W^2+\|f(v_2)\|_W^2-\underbrace{\|f(v_1)-f(v_2)\|^2}_{=\|f(v_1)\|_W^2-2\langle f(v_1), f(v_2)\rangle_W+\|f(v_2)\|_W^2}\Big] \\
&\overset{f(0)=0}{=} \quad \frac{1}{2}\left[\|f(v_1)-f(0)\|_W^2+\|f(v_2)-f(0)\|_W^2-\|f(v_1)-f(v_2)\|^2\right] \\
&\overset{f \text{ Bewegung}}{=} \quad \frac{1}{2}\left[\|v_1\|_V^2+\|v_2\|_V^2-\|v_1-v_2\|_V^2\right] \\
&= \quad \langle v_1, v_2\rangle_V.
\end{aligned}$$

D.h. f erfüllt die Isometrie-Bedingung. Mit (a) folgt: f ist linear (und somit eine Isometrie).

(e) Sei $f: V \to V$ Bewegung von V.
Definiere $g := T_{-f(0)} \circ f$, d.h. $g(v)=f(v)-f(0)$.
Wie in (b) folgt: g ist immer noch Bewegung., und $g(0)=0$.
$\overset{(d)}{\Rightarrow} g$ Isometrie.
$\Rightarrow f = T_{f(0)} \circ g$ mit Isometrie g, d.h. die gewünschte Darstellung.

Die Darstellung ist eindeutig: Seien $w_1, w_2 \in V$ und $g_1, g_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ zwei Isometrien mit $T_{w_1} \circ g_1 = f = T_{w_2} \circ g_2$.
$\Rightarrow g_1 = T_{w_1}^{-1} \circ T_{w_2} \circ g_2 = T_{w_2-w_1} \circ g_2$ (*).

- Fall 1: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 1$. Wähle $v \in V \backslash \{0\}$ beliebig.
  g_2 Isometrie $\Rightarrow$ g_2 injektiv $\Rightarrow$ $g_2(v) \neq 0 \Rightarrow$ Es gibt $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $w_2 - w_1 = \alpha g_2(v)$ (**).
  $\Rightarrow \|v\| \overset{g_1 \text{ Isometrie}}{=} \|g_1(v)\| \overset{(*)}{=} \|(T_{w_2-w_1} \circ g_2)(v)\| = \|g_2(v) + (w_2 - w_1)\| \overset{(**)}{=} |1+\alpha| \cdot \|g_2(v)\| \overset{g_2 \text{ Isometrie}}{=} |1+\alpha| \cdot \|v\|$.
  $\Rightarrow |1+\alpha| = 1 \Rightarrow \alpha = 0$
  $(**) \Rightarrow w_2 - w_1 = 0$
  $(*) \Rightarrow g_1 = g_2$.
- Fall 2: $\dim_{\mathbb{R}}(V) > 1$.
  g_2 Isometrie $\Rightarrow$ g_2 injektiv $\Rightarrow$ Es gibt $v \in V$ mit $w_2 - w_1 \perp g_2(v)$.
  $\Rightarrow \|v\|^2 \overset{g_1 \text{ Isometrie}}{=} \|g_1(v)\|^2 \overset{(*)}{=} \|(T_{w_2-w_1} \circ g_2)(v)\|^2 = \|g_2(v) + (w_2 - w_1)\|^2 \overset{w_2-w_1 \perp g_2(v)}{=} \|g_2(v)\|^2 + \|w_2 - w_1\|^2 \overset{g_2 \text{ Isometrie}}{=} \|v\|^2 + \|w_2 - w_1\|^2$.
  $\Rightarrow \|w_2 - w_1\| = 0 \Rightarrow w_1 = w_2$
  $(*) \Rightarrow g_1 = g_2$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **13. Juni 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`