Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

7. Abgabeblatt

Aufgabe 25	Aufgabe 26	Aufgabe 27	Aufgabe 28	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 25 (Orthogonale Komplemente in ∞-dim. Euklidischen Räumen, 6 = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(V, \langle .,. \rangle)$ ein Euklidischer Raum (nicht notwendig endlichdimensional) und $U, W \subseteq V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

(a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

(b) $U^\perp + W^\perp \subset (U \cap W)^\perp$. Ist zusätzlich $\dim_\mathbb{R}(V) < \infty$, so gilt Gleichheit.
Hinweis: Nutzen Sie, dass im Falle $dim_\mathbb{R}(V) < \infty$ für UVR $X \subset V$ gilt: $X = (X^\perp)^\perp$.

Sei nun $V := C[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ stetig}\} \subset \mathrm{Abb}([0,1], \mathbb{R})$ der Untervektorraum der stetigen Funktionen. Zusammen mit $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x$ ist V ein ∞-dimensionaler Euklidischer Raum. Gegeben sei weiter $c \in (0,1)$, und der Untervektorraum

$$U := \{f \in V | \forall x \in [c,1] : f(x) = 0\}$$

von V.

(c) Geben Sie $U^\perp$ explizit als Menge an und zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp = U$ gilt.
Hinweis: Für $g \in U^\perp$ definieren Sie $f \in U$ mit $f(x) := \begin{cases} 0, & x \in [c,1], \\ (c-x) \cdot g(x), & x \in [0,c) \end{cases}$.
Verwenden Sie ohne Beweis, dass die Multiplikation und Addition von stetigen Funktionen wieder stetig ist und für eine stetige Funktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\forall x \in [a,b] : h(x) \geq 0$ gilt: $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \Rightarrow h = 0$.

(d) Zeigen Sie $V \neq U \oplus U^\perp$ am Beispiel der konstanten Funktion $f \equiv 1$.

(e) Zeigen Sie, dass (b) im Allgemeinen nicht gelten muss, indem Sie $W := U^\perp$ wählen.

Aufgabe 26 (Isometrien auf $\mathbb{R}^2$, 5 = 1 + 1.5 + 1.5 + 1 Punkte).

Wir betrachten den Standardvektorraum $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$. Gegeben seien die Abbildungen $\varphi_i = \tilde{B}_i \in \mathrm{End}_\mathbb{R}(\mathbb{R}^2)$, wobei

$$B_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei weiter $A := \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass φ_1 eine Isometrie auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$ ist, aber nicht auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$.

(b) Zeigen Sie, dass φ_2 eine Isometrie auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ ist, aber nicht auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E_2})$.

(c) Geben Sie alle möglichen Isometrien $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ mit $\det(\varphi) = 1$ auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_A)$ an (d.h geben sie alle möglichen $B \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ an mit $\varphi = \tilde{B}$).
Hinweis: Verwenden Sie (21.11).

(d) Bestimmen Sie alle möglichen Skalarprodukte $\langle\cdot,\cdot\rangle_C$ auf $\mathbb{R}^2$, so dass φ_3 eine Isometrie auf $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle_C)$ ist (d.h. geben Sie die zugehörigen Matrizen $C \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ an).
Hinweis: Verwenden Sie A27(a).

Aufgabe 27 (Charakterisierung von Isometrien, 5 = 2 + 3 Punkte).
Sei $\mathbb{R}^n$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch positiv definit. Sei $f = \tilde{B}$ mit $B \in M(n\times n, \mathbb{R})$.

(a) Zeigen Sie:
$$f \text{ Isometrie in } (\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_A) \quad\Longleftrightarrow\quad B^tAB = A.$$

Es sei nun $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlichdimensionaler Euklidischer Vektorraum. Sei $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)\backslash\{0\}$.

(b) Zeigen Sie
$$\begin{array}{c}\forall v \in V, \forall \psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \text{ Isometrie}: \\ \|f(v)\| = \|(f\circ\psi)(v)\|\end{array} \quad\Longleftrightarrow\quad \exists \lambda \in \mathbb{R}, \exists G \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V) \text{ Isometrie}: f = \lambda \cdot G.$$

Hinweis: Betrachten Sie Abbildungen $\psi \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, welche die Elemente einer Orthonormalbasis von $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ geeignet permutiert, und nutzen Sie P28(a).

Aufgabe 28 (Charakterisierung von Bewegungen, 4 = 1 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5 Bonuspunkte).
Seien $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V)$, $(W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W)$ Euklidische Räume (nicht notwendig endlichdimensional) mit induzierten Normen $\|\cdot\|_W$, $\|\cdot\|_V$. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung mit der Eigenschaft
$$\forall v_1, v_2 \in V : \langle f(v_1), f(v_2)\rangle_W = \langle v_1, v_2\rangle_V$$

(a) Zeigen Sie: f ist eine Isometrie (d.h. f ist linear).

Eine Abbildung $f : V \to V$ heißt *Bewegung*, falls für alle $u, v \in V$: $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$. Zeigen Sie:

(b) Für jedes $w \in V$ ist die Translation $T_w : V \to V, v \mapsto v + w$ eine Bewegung.

(c) Ist $g : V \to V$ eine Isometrie, so ist auch $T_w \circ g$ eine Bewegung.

(d) Ist f eine Bewegung und $f(0) = 0$, so ist f eine Isometrie.
Hinweis: Nutzen Sie (a).

(e) Zu jeder Bewegung f von V existiert eine Isometrie $g \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ und $w \in V$ mit $f = T_w \circ g$. Ist diese Darstellung für $V \neq \{0\}$ eindeutig?

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **13. Juni 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`