UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

6. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 21	Aufgabe 22	Aufgabe 23	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 21 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, orthogonale Komplemente und Projektionen, 6 = 1 + 2 + 2 + 1).

Sei $\mathbb{R}^4$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$, und

$$U := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^4, \qquad A := \begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&1&0\\0&1&2&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ das von A induzierte Skalarprodukt und $\langle.,.\rangle_{E_4}$ das Standardskalarprodukt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von U als Unterraum von $(\mathbb{R}^4, \langle.,.\rangle_{E_4})$.

Führen Sie die folgenden beiden Aufgaben jeweils einmal in $(\mathbb{R}^4, \langle.,.\rangle_{E_4})$ und einmal in $(\mathbb{R}^4, \langle.,.\rangle_A)$ durch.

(c) Berechnen Sie $p_U(e_1)$ und geben Sie den Abstand $\inf_{u\in U}\|e_1 - u\|$ an.
Hinweis: Eine ONB von U in $(\mathbb{R}^4, \langle.,.\rangle_A)$ ist gegeben durch

$$(w_1, w_2, w_3) := (2^{-1/2}(1,1,-1,1)^t, 2^{-1/2}(0,-1,1,0)^t, 6^{-1/2}(-1,-1,-1,1)^t).$$

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Lösung:

(a) Wir nutzen das Hauptminorenkriterium. Es ist
$\det(A^{(1)}) = \det(2) = 2 > 0$, $\det(A^{(2)}) = \det(\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}) = 4-1 = 3 > 0$,
$\det(A^{(3)}) = \det(\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}) \overset{\text{Sarrus}}{=} 8-2-2 = 4 > 0$,
$\det(A) \overset{-\frac{1}{2}Z4+Z3\to Z3}{=} \det(\begin{pmatrix}2&-1&0&0\\-1&2&1&0\\0&1&\frac{3}{2}&0\\0&0&1&2\end{pmatrix}) \overset{\text{Laplace S4}}{=} 2\cdot\det(\begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&1\\0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}) \overset{\text{Sarrus}}{=} 2\cdot(6-2-\frac{3}{2}) = 5 > 0$,
Hauptminorenkriterium $\Rightarrow$ A positiv definit.

(b) Sei $v_1 = (1,1,-1,1)^t, v_2 = (2,-1,1,2)^t, v_3 = (1,-1,0,2)^t$.
Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_{E_4}$. Wir wenden die Gram-Schmidt Orthogonalisierung an.

- $\tilde{w}_1 := v_1$, $\|\tilde{w}_1\| = \sqrt{\langle v_1, v_1 \rangle} = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+1^2} = 2$
  $\Longrightarrow \; w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\tilde{w}_2 := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1$.
  Es ist

$$\begin{aligned} \langle v_2, w_1 \rangle &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(2-1-1+2) = 1, \\ \tilde{w}_2 &= v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow \; \|\tilde{w}_2\| = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2 + (\frac{3}{2})^2} = 3$
  $\Longrightarrow \; w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\tilde{w}_3 := v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$.
  Es ist

$$\begin{aligned} \langle v_3, w_1 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-1+0+2) = 1, \\ \langle v_3, w_2 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+1+0+2) = 2, \\ \tilde{w}_3 &= v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  $\Longrightarrow \; \|\tilde{w}_3\| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = 1$
  $\Longrightarrow \; w_3 := \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Damit bildet (w_1, w_2, w_3) eine ONB von U.

(c) (i) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_{E_4}$. Es gilt $p_U(e_1) = \sum_{i=1}^3 \langle e_1, w_i \rangle w_i$, und

$$\langle e_1, w_1 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle e_1, w_2 \rangle = \frac{1}{2}, \quad \langle e_1, w_3 \rangle = -\frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} p_U(e_1) &= \sum_{i=1}^3 \langle e_1, w_i \rangle w_i \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Weiterhin $\inf_{u \in U} \|e_1 - u\| = \|e_1 - p_U(e_1)\| = \|\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\| = \frac{1}{2}$.

(ii) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_A$.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle e_1, w_1 \rangle &= e_1^t \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\langle e_1, w_2 \rangle &= e_1^t \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\langle e_1, w_3 \rangle &= e_1^t \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{6}}.
\end{aligned}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
p_U(e_1) &= \sum_{i=1}^{3} \langle e_1, w_i \rangle w_i \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Weiterhin $\inf_{u \in U} \|e_1 - u\| = \|e_1 - p_U(e_1)\| = \|\frac{1}{6}\left(2\ -1\ -1\ -2 \right)\| = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

(d) (i) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_{E_4}$. (w_1, w_2, w_3, e_1) bildet eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Gram-Schmidt Orthogonalisiering: Mit $\tilde{w}_4 := e_1 - p_U(e_1) = \frac{1}{4}(1, -1, -1, -1)^t$ ist $(w_1, w_2, w_3, \tilde{w}_4)$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^4$, und (w_1, w_2, w_3) ist eine Orthogonalbasis von U. $\Longrightarrow$ $U^\perp = \mathrm{Lin}(\tilde{w}_4)$. ONB von $U^\perp$ ist gegeben durch $w_4 = \frac{\tilde{w}_4}{\|\tilde{w}_4\|} = \frac{1}{2}(1, -1, -1, -1)^t$.

(ii) Betrachte $\langle .,. \rangle := \langle .,. \rangle_A$. (w_1, w_2, w_3, e_1) bildet eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Gram-Schmidt Orthogonalisiering: Mit $\tilde{w}_4 := e_1 - p_U(e_1) = \frac{1}{6}(2, -1, -1, -2)^t$ ist $(w_1, w_2, w_3, \tilde{w}_4)$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{R}^4$, und (w_1, w_2, w_3) ist eine Orthogonalbasis von U. $\Longrightarrow$ $U^\perp = \mathrm{Lin}(\tilde{w}_4)$. ONB von $U^\perp$ ist gegeben durch $w_4 = \frac{\tilde{w}_4}{\|\tilde{w}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{30}}(2, -1, -1, -2)^t$.

Aufgabe 22 (Orthonormalisierung auf abstrakten Vektorräumen, 6 = 2.5 + 3.5 Punkte).

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $V := M(n \times n, \mathbb{R})$ und $A \in V$ symmetrisch positiv definit. Gegeben sei die symmetrische Bilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(v, w) := \mathrm{Spur}(v^t A w)$.

(i) Zeigen Sie, dass γ ein Skalarprodukt auf V ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $v = (v_1, ..., v_n) \in V$ (v_i, $i = 1, ..., n$ die Spalten von v) gilt: Spur$(v^t A v) = \sum_{i=1}^n v_i^t A v_i$.

Sei nun $n = 2$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit, sowie

$$W := \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3) := \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} \right).$$

(ii) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonomalbasis von W.

(b) Sei $V := \mathbb{R}[t]_{\leq n-1}$ und seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Gegeben sei die Bilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(p, q) := \sum_{i=1}^n p(x_i) q(x_i)$.

(i) Zeigen Sie, dass γ genau dann ein Skalarprodukt auf V ist, wenn x_i, $i = 1, ..., n$ paarweise verschieden sind.

Sei nun $n = 4$ und $x_1 := -1$, $x_2 := 0$, $x_3 := 1, x_4 = 2$. Sei $W := \mathrm{Lin}(1, t, t^2) \subset V$.

(ii) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von W.

(iii) Berechnen Sie die orthogonale Projektion $p_W(t^3)$ und $W^\perp$.

Lösung:

(a) (i) Sei $v \in V$ beliebig.
Schreibe $v = (v_1, ..., v_n)$ mit $v_i \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, ..., n)$.
$\Rightarrow v^t A v = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} (Av_1, ..., Av_n) = \left(v_i^t A v_j\right)_{i,j=1,...,n}$.
$\Rightarrow \mathrm{Spur}(v^t A v) = \sum_{i=1}^n v_i^t A v_i$.
(Alternativ: $\mathrm{Spur}(v^t A v) = \sum_{i=1}^n (v^t A v)_{ii}$, und $(v^t A v)_{ii} = \sum_{j,k=0}^n \underbrace{(v^t)_{ij}}_{=(v_i^t)_j} A_{jk} \underbrace{v_{ki}}_{=(v_i)_k} = v_i^t A v_i$.)
Sei $v \in V \backslash \{0\}$.
$\Rightarrow$ Es gibt $j \in \{1, ..., n\}$ mit $v_j \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
$\Rightarrow \gamma(v, v) = \mathrm{Spur}(v^t A v) = \sum_{i=1}^n v_i^t A v_i \overset{A \text{ pos. def.}}{\geq} v_j^t A v_j \overset{A \text{ pos. def.}, v_j \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}}{>} 0$.
$\Rightarrow \gamma$ positiv definit.

(ii) Es bezeichne $\|\cdot\| := \sqrt{\gamma(\cdot, \cdot)}$. Dann:

- $\tilde{w}_1 := v_1$,
- $\|\tilde{w}_1\|^2 = \|v_1\|^2 = \mathrm{Spur}(v_1^t A v_1) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right) = 9$.
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\tilde{w}_2 := v_2 - \gamma(w_1, v_2) w_1$.
  Hier ist

$$\begin{aligned} 3\mathrm{Spur}(w_1^t A v_2) &= \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} \right) = 18. \end{aligned}$$

  $\Rightarrow \tilde{w}_2 = v_2 - \gamma(w_1, v_2) w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- $\|\tilde{w}_2\|_2^2 = \mathrm{Spur}(\tilde{w}_2^t A \tilde{w}_2) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right)$
  $= \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \right) = 9$.
  $\Rightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.
- $\tilde{w}_3 := v_3 - \gamma(w_1, v_3) w_1 - \gamma(w_2, v_3) w_2$.

Hier ist

$$\begin{aligned}
3\mathrm{Spur}(w_1^t A v_3) &= \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -4\end{pmatrix}\Big)\\
&= \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 6\\ -11 & -10\end{pmatrix}\Big) = \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}15 & 14\\ 14 & 12\end{pmatrix}\Big) = 27.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
3\mathrm{Spur}(w_2^t A v_3) &= \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -4\end{pmatrix}\Big)\\
&= \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 6\\ -11 & -10\end{pmatrix}\Big) = \mathrm{Spur}\Big(\begin{pmatrix}10 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix}\Big) = 18.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_3 &:= v_3 - \gamma(w_1, v_3)w_1 - \gamma(w_2, v_3)w_2\\
&= \begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -4\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow v_3 \in \mathrm{Lin}(v_1, v_2)$, d.h. v_3 ist nicht nötig, um W zu erzeugen.
$\Rightarrow$ Lasse v_3 weg.

Also ist eine ONB von W gegeben durch (w_1, w_2) mit

$$w_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

(b) (i) „$\Leftarrow$“: Seien $x_1, ..., x_n$ verschieden.
Sei $p \in V\backslash\{0\}$ beliebig.
$\Rightarrow \gamma(p,p) = \sum_{i=1}^n p(x_i)^2 \geq 0$.
Angenommen, $\gamma(p,p) = 0$.
$\Rightarrow p(x_i) = 0$ $(i = 1, ..., n)$.
$\Rightarrow p$ hat n verschiedene Nullstellen, ist aber nur vom Grad $n-1$ $\overset{\text{Vorlesung Kap. 14}}{\Rightarrow}$ $p = 0$, Widerspruch!
Also $\gamma(p,p) > 0$.
„$\Rightarrow$“: Sei γ ein Skalarprodukt.
Angenommen, es gibt $j, k \in \{1, ..., n\}$ $(j \neq k)$ mit $x_j = x_k$. Definiere $p := \prod_{i\in\{1,...,n\}\backslash\{j\}}(t - x_i) \in V$ (da $\mathrm{grad}(p) = n-1$).
$\Rightarrow \gamma(p,p) = \sum_{i=1}^n p(x_i)^2 = 0$, aber $p \neq 0$, Widerspruch!
Also sind die $x_1, ..., x_n$ paarweise verschieden.

(ii) Sei $v_1 = 1$, $v_2 = t$, $v_3 = t^2$. Es bezeichne $\|\cdot\| := \sqrt{\gamma(\cdot,\cdot)}$. Wir wenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren an:

- $\tilde{w}_1 := v_1 = 1$,
  und $\|\tilde{w}_1\|^2 = \gamma(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) = \sum_{i=1}^4 \tilde{w}_1(x_i)^2 = 4$,
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = \frac{1}{2}$.
- $\tilde{w}_2 := v_2 - \gamma(w_1, v_2)w_1$,
  und $\gamma(w_1, v_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^4 x_i = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$,
  $\Rightarrow \tilde{w}_2 = v_2 - \gamma(w_1, v_2)w_1 = t - 1\cdot\frac{1}{2} = t - \frac{1}{2}$.
  Weiter $\|\tilde{w}_2\|^2 = \gamma(\tilde{w}_2, \tilde{w}_2) = \sum_{i=1}^4 \tilde{w}_2(x_i)^2 = 2(\frac{3}{2})^2 + 2(\frac{1}{2})^2 = 5$,
  $\Rightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(t - \frac{1}{2})$.

- $\tilde{w}_3 := v_3 - \gamma(w_1, v_3)w_1 - \gamma(w_2, v_3)w_2$,
  und

$$\gamma(w_1, v_3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \frac{1}{2}\cdot(1+0+1+4) = 3$$

$$\gamma(w_2, v_3) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \frac{1}{2})x_i^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\Big[-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot 4\Big] = \sqrt{5}.$$

$\Rightarrow \tilde{w}_3 := v_3 - \gamma(w_1, v_3)w_1 - \gamma(w_2, v_3)w_2 = t^2 - 3\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(t-\frac{1}{2}) = t^2 - \frac{3}{2} - (t - \frac{1}{2}) = t^2 - t - 1$.
Weiter $\|\tilde{w}_3\|^2 = \gamma(\tilde{w}_3, \tilde{w}_3) = \sum_{i=1}^4 \tilde{w}_3(x_i)^2 = 1+1+1+1 = 4$.
$\Rightarrow w_3 := \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \frac{1}{2}(t^2 - t - 1)$.

Damit ist also

$$(w_1, w_2, w_3) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{5}}(t-\frac{1}{2}), \frac{1}{2}(t^2-t-1))$$

eine ONB von W bzgl. γ.

(iii) Es gilt $p_W(t^3) = \sum_{i=1}^3 \gamma(w_i, t^3)w_i$, und

$$\gamma(w_1, t^3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = \frac{1}{2}\cdot(1+0-1+8) = 4$$

$$\gamma(w_2, t^3) = \frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=1}^{4}(x_i - \frac{1}{2})x_i^3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\Big[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot 8\Big] = \frac{14}{\sqrt{5}},$$

$$\gamma(w_3, t^3) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}(x_i^2 - x_i - 1)x_i^3 = \frac{1}{2}\cdot\Big[-1+0-1+8\Big] = 3.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} p_W(t^3) &= \sum_{i=1}^{3}\gamma(w_i, t^3)w_i \\ &= 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{14}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(t-\frac{1}{2}) + 3\cdot\frac{1}{2}(t^2-t-1) \\ &= 2 + \frac{14}{5}(t-\frac{1}{2}) + \frac{3}{2}(t^2-t-1) \\ &= \frac{1}{10}(15t^2+13t-9). \end{aligned}$$

$(1, t, t^2, t^3)$ bildet Basis von V.
Gram-Schmidt-Orthogonalisierung: Mit $\tilde{w}_4 := t^3 - p_W(t^3) = t^3 - \frac{1}{10}(15t^2+13t-9)$ ist $(w_1, w_2, w_3, \tilde{w}_4)$ Orthogonalbasis von V, und (w_1, w_2, w_3) ist Orthogonalbasis von W.
$\Rightarrow W^\perp = \mathrm{Lin}(\tilde{w}_4)$.

Aufgabe 23 (Cholesky-Zerlegung und QR-Zerlegung, 4 = 2 + 2 Punkte).
Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von B.

Lösung:

(a) Mit Gram-Schmidt: Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\gamma(v, w) := v^t A w$ sowie $\|v\| := \sqrt{\gamma(v, v)}$ die induzierte Norm.

- $\tilde{w}_1 := e_1$,
  $\Rightarrow \|\tilde{w}_1\|^2 = \gamma(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) = e_1^t A e_1 = 1$
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = e_1$.
- $\gamma(w_1, e_2) = e_1^t A e_2 = 2$.

  $$\Rightarrow \tilde{w}_2 := e_2 - \gamma(w_1, e_2) w_1 = e_2 - 2e_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  $$\|\tilde{w}_2\|^2 = \tilde{w}_2^t A \tilde{w}_2 = (-2, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4$$

  $$\Rightarrow w_2 := \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- Es gilt

  $$\begin{aligned} \gamma(w_1, e_3) &= e_1^t A e_3 = 1, \\ \gamma(w_2, e_3) &= \frac{1}{2}(-2, 1, 0) A e_3 = \frac{1}{2}(-2, 1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

  $$\Rightarrow \tilde{w}_3 = e_3 - \gamma(w_1, e_3) w_1 - \gamma(w_2, e_3) w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  $$\|\tilde{w}_3\|^2 = \tilde{w}_3^t A \tilde{w}_3 = (-1, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

  $$\Rightarrow w_3 = \frac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definiere

$$G := (w_1, w_2, w_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cholesky-Zerlegung Vorlesung $\Rightarrow A = G^t G$.

(b) Es sei

$$A := B^t B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 11 & -6 \\ 2 & -6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Mit Gram-Schmidt: Sei $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\gamma(v, w) := v^t A w$ sowie $\|v\| := \sqrt{\gamma(v, v)}$ die induzierte Norm.

- $\tilde{w}_1 := e_1$,
  $\Rightarrow \|\tilde{w}_1\|^2 = \gamma(\tilde{w}_1, \tilde{w}_1) = e_1^t A e_1 = 1$
  $\Rightarrow w_1 := \frac{\tilde{w}_1}{\|\tilde{w}_1\|} = e_1$.
- $\gamma(w_1, e_2) = e_1^t A e_2 = -3$.

  $$\Rightarrow \tilde{w}_2 := e_2 + 3\gamma(w_1, e_2) w_1 = e_2 + 3e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  $$\|\tilde{w}_2\|^2 = \tilde{w}_2^t A \tilde{w}_2 = (3, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

  $$\Rightarrow w_2 := \tfrac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
- Es gilt

  $$\begin{aligned} \gamma(w_1, e_3) &= e_1^t A e_3 = 2, \\ \gamma(w_2, e_3) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(3, 1, 0) A e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(3, 1, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

  $$\Rightarrow \tilde{w}_3 = e_3 - \gamma(w_1, e_3) w_1 - \gamma(w_2, e_3) w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  $$\|\tilde{w}_3\|^2 = \tilde{w}_3^t A \tilde{w}_3 = (-2, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2,$$

  $$\Rightarrow w_3 = \tfrac{\tilde{w}_3}{\|\tilde{w}_3\|} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definiere

$$G := (w_1, w_2, w_3)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Cholesky-Zerlegung Vorlesung $\Rightarrow A = R^t R$, und

$$Q := B \cdot R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

QR-Zerlegung Vorlesung $\Rightarrow B = QR$, und Q ist orthogonal, R obere Dreiecksmatrix.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **06. Juni 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`