Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

6. Abgabeblatt

Aufgabe 21	Aufgabe 22	Aufgabe 23	Aufgabe 24	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 21 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung, orthogonale Komplemente und Projektionen, 6 = 1 + 2 + 2 + 1).

Sei $\mathbb{R}^4$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$, und

$$U := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^4, \qquad A := \begin{pmatrix}2 & -1 & 0 & 0\\-1 & 2 & 1 & 0\\0 & 1 & 2 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Es bezeichne $\langle\cdot,\cdot\rangle_A$ das von A induzierte Skalarprodukt und $\langle .,.\rangle_{E_4}$ das Standardskalarprodukt.

(b) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von U als Unterraum von $(\mathbb{R}^4, \langle .,.\rangle_{E_4})$.

Führen Sie die folgenden beiden Aufgaben jeweils einmal in $(\mathbb{R}^4, \langle .,.\rangle_{E_4})$ und einmal in $(\mathbb{R}^4, \langle .,.\rangle_A)$ durch.

(c) Berechnen Sie $p_U(e_1)$ und geben Sie den Abstand $\inf_{u\in U} \|e_1 - u\|$ an.
Hinweis: Eine ONB von U in $(\mathbb{R}^4, \langle .,.\rangle_A)$ ist gegeben durch

$$(w_1, w_2, w_3) := (2^{-1/2}(1,1,-1,1)^t, 2^{-1/2}(0,-1,1,0)^t, 6^{-1/2}(-1,-1,-1,1)^t).$$

(d) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$.

Aufgabe 22 (Orthonormalisierung auf abstrakten Vektorräumen, 6 = 2.5 + 3.5 Punkte).

Sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $V := M(n \times n, \mathbb{R})$ und $A \in V$ symmetrisch positiv definit. Gegeben sei die symmetrische Bilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(v,w) := \mathrm{Spur}(v^t A w)$.

(i) Zeigen Sie, dass γ ein Skalarprodukt auf V ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass für $v = (v_1, ..., v_n) \in V$ (v_i, $i = 1, ..., n$ die Spalten von v) gilt: Spur$(v^t A v) = \sum_{i=1}^n v_i^t A v_i$.

Sei nun $n = 2$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit, sowie

$$W := \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3) := \mathrm{Lin}\Big(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}\Big).$$

(ii) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt Orthogonalisierung eine Orthonomalbasis von W.

(b) Sei $V := \mathbb{R}[t]_{\leq n-1}$ und seien $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$. Gegeben sei die Bilinearform $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(p, q) := \sum_{i=1}^n p(x_i)q(x_i)$.

(i) Zeigen Sie, dass γ genau dann ein Skalarprodukt auf V ist, wenn x_i, $i = 1, ..., n$ paarweise verschieden sind.

Sei nun $n = 4$ und $x_1 := -1$, $x_2 := 0$, $x_3 := 1, x_4 = 2$. Sei $W := \mathrm{Lin}(1, t, t^2) \subset V$.

(ii) Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt-Orthogonalisierung eine Orthonormalbasis von W.

(iii) Berechnen Sie die orthogonale Projektion $p_W(t^3)$ und $W^\perp$.

Aufgabe 23 (Cholesky-Zerlegung und QR-Zerlegung, 4 = 2 + 2 Punkte).
Gegeben seien die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

(a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von A mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthogonalisierungsverfahrens.

(b) Berechnen Sie die QR-Zerlegung von B.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **06. Juni 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`