Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

5. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 17	Aufgabe 18	Aufgabe 19	Aufgabe 20	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 17 (Orthogonalprojektionen und Abstände, 6 = 1 + 1.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Raum, $U, W \subset V$ Untervektorräume von V und $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ eine lineare Abbildung. Es bezeichne p_U die Orthogonalprojektion auf U. Zeigen Sie:

(a) $p = p_U \quad \Longleftrightarrow \quad (p(V) \subset U$ und $\forall v \in V : v - p(v) \perp U)$.

(b) Für $v \in V$, $\hat{u} \in U$ gilt: $\inf_{u \in U} \|v - u\| = \|v - \hat{u}\| \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{u} = p_U(v)$.

Hinweis zu (a),(b): Jeweils eine Richtung ist aus der Vorlesung bereits bekannt.

Für $X, Y \subseteq V$ heißt $d(X, Y) := \inf\{\|x - y\| : x \in X, y \in Y\}$ der Abstand von X zu Y. Falls $X = \{x\}$ einelementig ist, so schreiben wir auch kurz $d(x, Y)$.

(c) Seien $a, b \in V$. Zeigen Sie, dass

$$d(a + U, b + W) = \|(a - b) - p_{U+W}(a - b)\|.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $d(a + U, b + W) = d(a - b, U + W)$. *Sind* Z_1, Z_2 *Mengen und* $h_i : Z_i \to \mathbb{R}$ *Abbildungen, so ist* $\inf_{z_1 \in Z_1} h_1(z_1) = \inf_{z_2 \in Z_2} h_2(z_2)$ *äquivalent zu (i)* $\forall z_1 \in Z_1 : h_1(z_1) \geq \inf_{z_2 \in Z_2} h_2(z_2)$ *und (ii)* $\forall z_2 \in Z_2 : h_2(z_2) \geq \inf_{z_1 \in Z_1} h_1(z_1)$.

Es sei nun $V = \mathbb{R}^4$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und

$$U := \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), \quad W := \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4, \quad a = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(d) Ermitteln Sie $p_{U+W}(a - b)$ mit Satz (20.5), und damit $d(a + U, b + W)$.

(e) Es ist $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3) := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0)^t, \frac{1}{2}(-1, 1, 1, 1)^t\right)$ eine Orthonormalbasis von $U + W$. Bestimmen Sie $p_{U+W}(a - b)$ mit Bemerkung (20.8).

Lösung:

(a) „$\Rightarrow$“: Klar (Def. aus Vorlesung umfasst mehr Eigenschaften).
„$\Leftarrow$“: Es ist noch zu zeigen, dass $p^2 = p$ (d.h. dass p Projektion ist) und $U \subset \text{Bild}(p)$ (damit $\text{Bild}(p) = U$).
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist auch ein Skalarprodukt auf dem UVR U (klar: weiterhin bilinear, weiterhin positiv definit; die Bedingungen müssen nur für weniger Vektoren erfüllt sein).
Sei $v \in V$ beliebig. Dann gilt für alle $u \in U$:

$$\langle \underbrace{p(v) - p(p(v))}_{\in U}, u \rangle \overset{\text{Geg. Eigenschaft}}{=} 0.$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet auf $U \Rightarrow p(v) - p(p(v)) = 0$.
$\Rightarrow p(p(v)) = p(v)$.
Aussage gilt für alle $v \in V \Rightarrow p^2 = p$.
Wir zeigen $U \subset \text{Bild}(p)$: Sei $u \in U$. Wir zeigen: $u = p(u)$ ($\Rightarrow u \in \text{Bild}(p)$)
Es gilt

$$\|u - p(u)\|^2 = \langle u - p(u), \underbrace{u - p(u)}_{\in U} \rangle \overset{\text{Vorauss.}}{=} 0.$$

$\| \cdot \|$ definit $\Rightarrow u = p(u)$.

(b)
- „$\Rightarrow$“: Es ist

  $$\|v - \hat{u}\|^2 = \| \underbrace{(v - p_U(v))}_{\in U^\perp} + \underbrace{(p_U(v) - \hat{u})}_{\in U} \|^2 \overset{\text{Pythagoras}}{=} \|v - p_U(v)\|^2 + \|p_U(v) - \hat{u}\|^2. \quad (*)$$

  Voraussetzung ($\hat{u}$ Minimierer, wähle $u = p_U(v)$) $\Rightarrow$

  $$\|v - p_U(v)\|^2 + \|p_U(v) - \hat{u}\|^2 \overset{(*)}{=} \|v - \hat{u}\|^2 \overset{\text{Vorauss.}}{\leq} \|v - p_U(v)\|^2.$$

  $\Rightarrow \|p_U(v) - \hat{u}\|^2 \leq 0$
  $\overset{\| \cdot \| \text{ definit}}{\Rightarrow} \hat{u} = p_U(v)$.
- „$\Leftarrow$“: Vorlesung (Satz 20.7).

(c) Zu zeigen ist

$$\inf\{\|x - y\| : x \in a + U, y \in b + W\} = \inf_{v \in U + W} \|(a - b) - v\|.$$

Dazu zeigen wir: (i) „$\geq$“ und (ii) „$\leq$“ getrennt. Für (i), (ii) genügt es zu zeigen:

(i) $\forall x \in a + U, y \in b + W : \|x - y\| \geq \inf_{v \in U+W} \|(a - b) - v\|$,
(ii) $\forall v \in U + W$: $\|(a - b) - v\| \geq \inf\{\|x - y\| : x \in a + U, y \in b + W\}$.

Nachweise von (i), (ii):

(i) Sei $x \in a + U$, $y \in b + W$ beliebig. $\Rightarrow$ Es gibt $u \in U, w \in W$ mit $x = a + u$, $y = b + w$.
$\Rightarrow \|x - y\| = \|(a - b) - \underbrace{(-u + w)}_{\in U+W}\| \geq \inf_{v \in U+W} \|(a - b) - v\|$.

(ii) Sei $v \in U + W$ beliebig.
$\Rightarrow$ Es gibt $u \in U$, $w \in W$ mit $v = u + w$.
$\Rightarrow \|(a - b) - v\| = \| \underbrace{(a + u)}_{\in a+U} - \underbrace{(b - w)}_{\in b+W} \| \geq \inf\{\|x - y\| : x \in a + U, y \in b + W\}$.

Eigenschaft Orthogonalprojektion $\Rightarrow d(a-b, U+W) = \inf_{v\in U+W} \|(a-b)-v\| = \|(a-b)-p_{U+W}(a-b)\|$.

(d) Wir bestimmen eine Basis von $U+W$, d.h.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3) := ((1,0,0,1)^t, (0,1,-1,0)^t, (0,0,1,1)^t)$ eine Basis von $U+W$.
Vorlesung $\Longrightarrow p_{U+W}(a-b) = X(X^tX)^{-1}X^t(a-b)$ mit $X = (b_1, b_2, b_3) \in M(4\times 3, \mathbb{R})$
Es ist

$$X^tX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (X^tX)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

und also

$$X(X^tX)^{-1}X^t(a-b) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $(a-b) - p_{U+W}(a-b) = \frac{1}{2}(1,1,1,-1)^t$. Damit:

$$d(a+U, b+W) \overset{(a)}{=} \|(a-b) - p_{U+W}(a-b)\| = \frac{1}{2}\|(1,1,1,-1)\| = 1.$$

(e) Bemerkung (20.8) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} p_{U+W}(a-b) &= \sum_{j=1}^{3} \langle v_j, \underbrace{a-b}_{=(0,-1,0,-3)^t} \rangle v_j \\ &= -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18 (Funktionsapproximation durch Polynome, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Wir betrachten den Vektorraum $V := U_3$, wobei

$$U_k := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ Polynom vom Grad} \leq k\} \subset \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad k \in \mathbb{N},$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(f,g) := \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\mathrm{d}x$. Definiere $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 0,1,2)$ durch

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x-1, \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2).$$

Aus A15 ist bekannt, dass $\mathcal{B}_k := (p_0, ..., p_k)$ eine ONB von U_k bzgl. γ ist. Sei $f \in V$, $f(x) = x^3$.

(a) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektionen $p_{U_k}(f)$, $k \in \{0,1,2\}$ in (V, γ) und skizzieren Sie diese zusammen mit f im Intervall $[0,5]$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis $\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k!$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$.

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}, \beta(f,g) = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x/2}\mathrm{d}x$ ein weiteres Skalarprodukt auf V.

(b) Zeigen Sie: Ist $(v_i)_{i\in I}$ orthonormal in (V,γ), so ist $(w_i)_{i\in I}$ definiert durch $w_i(x) := \frac{1}{\sqrt{2}}v_i(\frac{x}{2})$ orthonormal in (V,β). *Hinweis: Substitution.*

(c) Geben Sie eine ONB von U_2 bzgl. β an und berechnen Sie $p_{U_2}(f)$ in (V,β).

(d) Skizzieren Sie die Projektionen $p_{U_2}(f)$ aus (a) und (c) zusammen mit f in einem Graphen für $x \in [0,5]$. Können Sie die unterschiedlichen Formen erklären (ca. 2 Sätze)?

Lösung: (a) Es ist für $k \in \{0,1,2\}$:

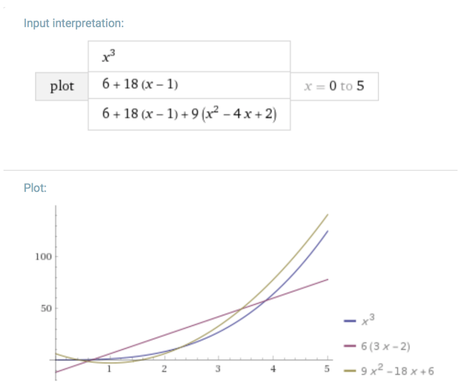
$$p_{U_k}(f) = \sum_{i=0}^{k} \gamma(f,p_i)p_i,$$

zu bestimmen ist also $\gamma(f,p_i)$, $i \in \{0,1,2\}$. Hier ist mit dem Hinweis:

$$\begin{aligned}
\gamma(f,p_0) &= \int_0^\infty x^3 e^{-x}\mathrm{d}x = 3! = 6,\\
\gamma(f,p_1) &= \int_0^\infty x^3(x-1)e^{-x}\mathrm{d}x = 4! - 3! = 18,\\
\gamma(f,p_2) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty x^3(x^2-4x+2)e^{-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big(5! - 4\cdot 4! + 2\cdot 3!\Big) = 18.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
(p_{U_0}(f))(x) &= 6,\\
(p_{U_1}(f))(x) &= 6 + 18(x-1),\\
(p_{U_2}(f))(x) &= 6 + 18(x-1) + 18\cdot\frac{1}{2}(x^2-4x+2).
\end{aligned}$$



(b) Es gilt für $i \in I$:

$$\beta(w_i,w_i) = \frac{1}{2}\int_0^\infty v_i(\frac{x}{2})^2 e^{-x/2}\mathrm{d}x \overset{y:=\frac{x}{2}}{=} \int_0^\infty v_i(y)^2 e^{-y}\mathrm{d}y = \gamma(v_i,v_i) = 1,$$

und für $i,j \in I$, $i \neq j$:

$$\beta(w_i,w_j) = \frac{1}{2}\int_0^\infty v_i(\frac{x}{2})v_j(\frac{x}{2})e^{-x/2}\mathrm{d}x \overset{y:=\frac{x}{2}}{=} \int_0^\infty v_i(y)v_j(y)e^{-y}\mathrm{d}y = \gamma(v_i,v_j) = 0.$$

(c) Mittels (b) folgt: $\mathcal{C} = (q_0, q_1, q_2)$ bildet eine ONB von U_2 bzgl. β, wobei

$$q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2), \quad \frac{1}{8\sqrt{2}}(x^2 - 8x + 8).$$

Es ist dann bzgl. β:

$$p_{U_2}(f) = \sum_{i=0}^{2} \beta(f, q_i) q_i,$$

zu bestimmen ist also $\beta(f, q_i)$, $i \in \{0, 1, 2\}$. Wegen

$$\begin{aligned} \beta(f, q_i) &= \int_0^\infty f(x) \frac{1}{\sqrt{2}} p_i(\frac{x}{2}) e^{-x/2} \mathrm{d}x \overset{y:=x/2}{=} \sqrt{2} \int_0^\infty f(2y) p_i(y) e^{-y} \mathrm{d}y \\ &= 8\sqrt{2} \cdot \int_0^\infty f(y) p_i(y) e^{-y} \mathrm{d}y \end{aligned}$$

folgt mit (a):

$$\begin{aligned} \beta(f, q_0) &= 8\sqrt{2} \cdot 6, \\ \beta(f, q_1) &= 8\sqrt{2} \cdot 18, \\ \beta(f, q_2) &= 8\sqrt{2} \cdot 18, \end{aligned}$$

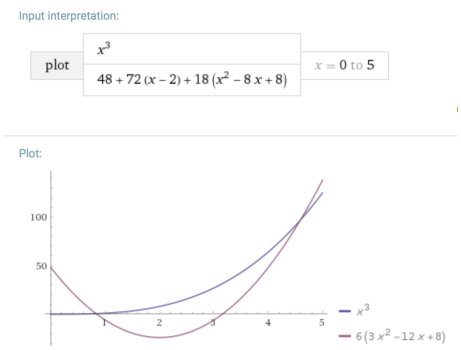
also

$$(p_{U_2}(f))(x) = 48 + 72 \cdot (x-2) + 18 \cdot (x^2 - 8x + 8)$$

Alternativ kann mit dem Hinweis gearbeitet werden:

$$\beta(f, q_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty x^3 e^{-x/2} \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2^4 3!, \ \ \textit{usw.}$$

(d) Im Gegensatz zu (a) ist die Approximation in (c) im Intervall [0,5] von f durch $p_{U_2}(f)$ schlechter. Der Grund ist, dass durch die Projektion in (c) der Abstand $\|f-u\|_\beta = \left(\int_0^\infty (f(x) - u(x))^2 e^{-x/2} \mathrm{d}x\right)^{1/2}$ minimiert wird, in (a) jedoch der Abstand $\|f-u\|_\gamma = \left(\int_0^\infty (f(x) - u(x))^2 e^{-x} \mathrm{d}x\right)^{1/2}$. In (c) wird also versucht, dass die Funktion f in etwa auf einem doppelt so großem Intervall wie in (a) gut approximiert wird, dies geht nur auf Kosten der Qualität im Intervall $[0, 5]$.



Aufgabe 19 (Ausgleichsrechnung: Lineare Regression, 3 = 1.5 + 1.5 Punkte).

Für gegebene Beobachtungen $x_i \in \mathbb{R}, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ wird ein linearer Zusammenhang der Form

$$y_i \approx a + b \cdot x_i, \quad i = 1, ..., n$$

vermutet, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Es gebe $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $x_i \neq x_j$. Schätzungen für die Parameter werden ermittelt durch Lösung des Minimierungsproblems

$$\inf_{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} |y_i - (a + bx_i)|^2 \quad (*).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(*)$ sich mit $\beta = (a, b)^t$ in der Form $\inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\|$ schreiben lässt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung der Form

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x}, \qquad \hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

gibt, wobei $\overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $S_{xx} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$, $S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$.

(b) Es wird vermutet, dass zwischen der Dicke des Baumstamms (x_i in cm) und der Höhe (y_i in dm) einer Fichte ein linearer Zusammenhang besteht. Es werden folgende $n = 5$ Beobachtungen erhoben:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0	2	4	8	10

Berechnen Sie $(\hat{a}, \hat{b})$ aus (a) und skizzieren Sie die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ sowie die Gerade $x \mapsto \hat{a} + \hat{b} \cdot x$ in einem Graphen.

Lösung: (a) Wir fassen die Beobachtungen $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, als Vektoren im $\mathbb{R}^n$ zusammen und erhalten die Darstellung:

$$y := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}}_{=:X \in M(n \times 2, \mathbb{R})} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{=:\beta \in \mathbb{R}^2} \quad \in \mathbb{R}^n$$

Damit folgt

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2 \overset{\text{Def. Skalarprod.}}{=} \inf_{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2} \langle y - X\beta, y - X\beta \rangle$$
$$\overset{\text{Def. Norm}}{=} \inf_{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2} \|y - X\beta\|^2$$

P18(a) $\overset{\text{Rang}(X)=2}{\Longrightarrow}$ Die eindeutige Lösung $\hat{\beta} := (\hat{a}, \hat{b})^t \in \mathbb{R}^2$ erfüllt $\hat{\beta} = (X^t X)^{-1} X^t y$.

- Berechne $(X^t X)^{-1}$:
  Setze $\overline{x^2} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x^2$.

$$X^t X = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 & \overline{x} \\ \overline{x} & \overline{x^2} \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow (X^t X)^{-1} = n^{-1} \frac{1}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} \begin{pmatrix} \overline{x^2} & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{pmatrix}$$

- Berechne $(X^tX)^{-1}X^tY$:
  Setze $\overline{xy} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_iy_i$.

$$(X^tX)^{-1}X^tY = n^{-1}\frac{1}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}\begin{pmatrix}\overline{x^2} & -\overline{x}\\ -\overline{x} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n y_i\\ \sum_{i=1}^n x_iy_i\end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}\begin{pmatrix}\overline{x^2}\cdot\overline{y} & -\overline{x}\cdot\overline{xy}\\ -\overline{x}\cdot\overline{y} & \overline{xy}\end{pmatrix}$$

D.h.

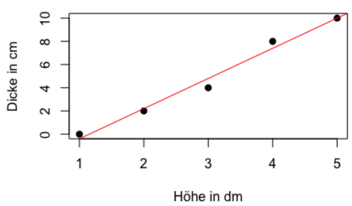
$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{b}\end{pmatrix} = \frac{1}{\overline{x^2}-\overline{x}^2}\begin{pmatrix}\overline{x^2}\cdot\overline{y}-\overline{x}\cdot\overline{xy}\\ -\overline{x}\cdot\overline{y}+\overline{xy}\end{pmatrix}$$

Es folgt elementar $\hat{b} = \frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$ und $\hat{a} = \frac{\overline{x^2}\cdot\overline{y}-\overline{x}\cdot\overline{xy}}{\overline{x^2}-\overline{x}^2} = \overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

(b) Mittels (a) berechnen wir

- $\overline{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 x_i = \frac{1}{5}(1+2+3+4+5) = 3$,
- $\overline{y} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5}(2+4+8+10) = \frac{24}{5}$,
- $S_{xx} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 (x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{5}(4+1+0+1+4) = 2$,
- $S_{xy} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^5 (x_i-\overline{x})^2 = \frac{1}{5}(9.6+2.8+0+3.2+10.4) = \frac{26}{5}$

$\implies \hat{b} = \frac{\frac{26}{5}}{2} = \frac{13}{5}, \hat{a} = \frac{24}{5} - \frac{13}{5}\cdot 3 = -3.$
$\implies$ Die Ausgleichgerade ist gegeben über $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, x\mapsto -3+\frac{13}{5}x$.



Aufgabe 20 (Anwendungen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU), 3 = 1 + 1 + 1 Punkte).

Es sei $n\in\mathbb{N}$ und $a_i\in\mathbb{R}, b_i\in\mathbb{R}, c_i\in\mathbb{R}, w_i\in\mathbb{R}$ $(i\in\{1,...,n\})$. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

(a) Ist $w_i>0$ $(i\in\{1,...,n\})$, so gilt $\left(\sum_{i=1}^n w_ia_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^n w_ia_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n w_ib_i^2\right)$.

(b) Die Ungleichung vom harmonischen und arithmetischen Mittel: Ist $a_i>0$ $(i\in\{1,...,n\})$, so gilt $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{a_i}\right)^{-1}\le\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i$.

(c) Es gilt $\left(\sum_{i=1}^n a_ib_ic_i\right)^2\le\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)$.
Hinweis: Definieren Sie $\hat{c}_i := c_i\cdot(\sum_{j=1}^n c_j^2)^{-1/2}$ und wenden Sie die CSU geeignet auf $\sum_{i=1}^n a_ib_i\hat{c}_i$ an.

Lösung:

Sofern nicht anders bemerkt, verwenden wir die CSU auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n x_iy_i$ für $x,y\in\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)^2 = \langle x,y\rangle^2 \le \|x\|^2\|y\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right).$$

(a) Möglichkeit 1: $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist ein Skalarprodukt. Es folgt direkt die Aussage aus der CSU für $\langle\cdot,\cdot\rangle$:

$$\langle x, y\rangle^2 = \sum_{i=1}^n w_i x_i y_i, \quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^n w_i x_i^2.$$

Möglichkeit 2: CSU liefert

$$\Big(\sum_{i=1}^n w_i a_i b_i\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n \sqrt{w_i} a_i \cdot \sqrt{w_i} b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^n w_i a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n w_i b_i^2\Big).$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) &\overset{a_i>0\,,\,b_i:=\sqrt{a_i}}{=} \left(\sum_{i=1}^n b_i^{-2}\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \\
&= \|b_i^{-1}\|\|b_i\| \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl.}}{\geq} |\langle b_i^{-1}, b_i\rangle| \\
&= \left(\sum_{i=1}^n b_i^{-1} b_i\right)^2 \\
&= \left(\sum_{i=1}^n 1\right)^2 = n^2
\end{aligned}$$

Umstellen der Ungleichung liefert die Aussage.

(c) Wir definieren $\hat{c}_i := \frac{c_i}{\sqrt{c_1^2+\ldots+c_n^2}} \implies |\hat{c}_i| \leq 1$ für $1 \leq i \leq n$. Dann gilt:

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i(b_i\hat{c}_i)\Big)^2 \overset{\text{CSU}}{\leq} \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n b_i^2 \hat{c}_i^2\Big) \overset{|\hat{c}_i|\leq 1}{\leq} \Big(\sum_{i=1}^n a_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^n b_i^2\Big), \quad (*)$$

Andererseits

$$\Big(\sum_{i=1}^n a_i(b_i\hat{c}_i)\Big)^2 = \Big(\sum_{i=1}^n c_i^2\Big)^{-1}\Big(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i\Big)^2.$$

Einsetzen in $(*)$ liefert die Behauptung.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Mittwoch, den **29. Mai 2019, 16:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`