UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

5. Abgabeblatt

Aufgabe 17	Aufgabe 18	Aufgabe 19	Aufgabe 20	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 17 (Orthogonalprojektionen und Abstände, 6 = 1 + 1.5 + 1.5 + 1 + 1 Punkte).

Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer Raum, $U, W \subset V$ Untervektorräume von V und $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ eine lineare Abbildung. Es bezeichne p_U die Orthogonalprojektion auf U. Zeigen Sie:

(a) $p = p_U \quad \Longleftrightarrow \quad (p(V) \subset U$ und $\forall v \in V : v - p(v) \perp U)$.

(b) Für $v \in V$, $\hat{u} \in U$ gilt: $\inf_{u \in U} \|v - u\| = \|v - \hat{u}\| \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{u} = p_U(v)$.

Hinweis zu (a),(b): Jeweils eine Richtung ist aus der Vorlesung bereits bekannt.

Für $X, Y \subseteq V$ heißt $d(X,Y) := \inf\{\|x - y\| : x \in X, y \in Y\}$ der Abstand von X zu Y. Falls $X = \{x\}$ einelementig ist, so schreiben wir auch kurz $d(x, Y)$.

(c) Seien $a, b \in V$. Zeigen Sie, dass

$$d(a + U, b + W) = \|(a - b) - p_{U+W}(a - b)\|.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst $d(a + U, b + W) = d(a - b, U + W)$. *Sind* Z_1, Z_2 *Mengen und* $h_i : Z_i \to \mathbb{R}$ *Abbildungen, so ist* $\inf_{z_1 \in Z_1} h_1(z_1) = \inf_{z_2 \in Z_2} h_2(z_2)$ *äquivalent zu (i)* $\forall z_1 \in Z_1 : h_1(z_1) \geq \inf_{z_2 \in Z_2} h_2(z_2)$ *und (ii)* $\forall z_2 \in Z_2 : h_2(z_2) \geq \inf_{z_1 \in Z_1} h_1(z_1)$.

Es sei nun $V = \mathbb{R}^4$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt und

$$U := \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right), \quad W := \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\3\end{pmatrix}\right) \subseteq \mathbb{R}^4, \quad a = \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix}1\\0\\2\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

(d) Ermitteln Sie $p_{U+W}(a - b)$ mit Satz (20.5), und damit $d(a + U, b + W)$.

(e) Es ist $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3) := \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0,1)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1,0)^t, \frac{1}{2}(-1,1,1,1)^t\right)$ eine Orthonormalbasis von $U + W$. Bestimmen Sie $p_{U+W}(a - b)$ mit Bemerkung (20.8).

Aufgabe 18 (Funktionsapproximation durch Polynome, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Wir betrachten den Vektorraum $V := U_3$, wobei

$$U_k := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | f \text{ Polynom vom Grad} \leq k\} \subset \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \qquad k \in \mathbb{N},$$

ausgestattet mit dem Skalarprodukt $\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \gamma(f, g) := \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}\mathrm{d}x$. Definiere $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2)$ durch

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - 1, \quad p_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2).$$

Aus A15 ist bekannt, dass $\mathcal{B}_k := (p_0, ..., p_k)$ eine ONB von U_k bzgl. γ ist. Sei $f \in V$, $f(x) = x^3$.

(a) Bestimmen Sie die Orthogonalprojektionen $p_{U_k}(f)$, $k \in \{0, 1, 2\}$ in (V, γ) und skizzieren Sie diese zusammen mit f im Intervall $[0, 5]$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis $\int_0^\infty x^k e^{-x}\mathrm{d}x = k!$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$, $\lambda > 0$.

Sei $\beta : V \times V \to \mathbb{R}, \beta(f, g) = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x/2}\mathrm{d}x$ ein weiteres Skalarprodukt auf V.

(b) Zeigen Sie: Ist $(v_i)_{i\in I}$ orthonormal in (V, γ), so ist $(w_i)_{i\in I}$ definiert durch $w_i(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} v_i(\frac{x}{2})$ orthonormal in (V, β). *Hinweis: Substitution.*

(c) Geben Sie eine ONB von U_2 bzgl. β an und berechnen Sie $p_{U_2}(f)$ in (V, β).

(d) Skizzieren Sie die Projektionen $p_{U_2}(f)$ aus (a) und (c) zusammen mit f in einem Graphen für $x \in [0, 5]$. Können Sie die unterschiedlichen Formen erklären (ca. 2 Sätze)?

Aufgabe 19 (Ausgleichsrechnung: Lineare Regression, 3 = 1.5 + 1.5 Punkte).

Für gegebene Beobachtungen $x_i \in \mathbb{R}, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ wird ein linearer Zusammenhang der Form

$$y_i \approx a + b \cdot x_i, \quad i = 1, ..., n$$

vermutet, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Es gebe $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $x_i \neq x_j$. Schätzungen für die Parameter werden ermittelt durch Lösung des Minimierungsproblems

$$\inf_{(a,b)^t \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n |y_i - (a + bx_i)|^2 \quad (*).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(*)$ sich mit $\beta = (a, b)^t$ in der Form $\inf_{\beta \in \mathbb{R}^m} \|y - X\beta\|$ schreiben lässt. Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Lösung der Form

$$\hat{a} = \overline{y} - \hat{b} \cdot \overline{x}, \qquad \hat{b} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

gibt, wobei $\overline{y} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$, $\overline{x} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$, $S_{xx} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$, $S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$.

(b) Es wird vermutet, dass zwischen der Dicke des Baumstamms (x_i in cm) und der Höhe (y_i in dm) einer Fichte ein linearer Zusammenhang besteht. Es werden folgende $n = 5$ Beobachtungen erhoben:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0	2	4	8	10

Berechnen Sie $(\hat{a}, \hat{b})$ aus (a) und skizzieren Sie die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, ..., n$ sowie die Gerade $x \mapsto \hat{a} + \hat{b} \cdot x$ in einem Graphen.

Aufgabe 20 (Anwendungen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (CSU), 3 = 1 + 1 + 1 Punkte).

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_i \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}, c_i \in \mathbb{R}, w_i \in \mathbb{R}$ $(i \in \{1, ..., n\})$. Zeigen Sie folgende Ungleichungen:

(a) Ist $w_i > 0$ $(i \in \{1, ..., n\})$, so gilt $\big(\sum_{i=1}^n w_i a_i b_i\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^n w_i a_i^2\big) \cdot \big(\sum_{i=1}^n w_i b_i^2\big)$.

(b) Die Ungleichung vom harmonischen und arithmetischen Mittel: Ist $a_i > 0$ $(i \in \{1, ..., n\})$, so gilt $\big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\big)^{-1} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$.

(c) Es gilt $\big(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i\big)^2 \leq \big(\sum_{i=1}^n a_i^2\big) \cdot \big(\sum_{i=1}^n b_i^2\big) \cdot \big(\sum_{i=1}^n c_i^2\big)$.
Hinweis: Definieren Sie $\hat{c}_i := c_i \cdot (\sum_{j=1}^n c_j^2)^{-1/2}$ *und wenden Sie die CSU geeignet auf* $\sum_{i=1}^n a_i b_i \hat{c}_i$ *an.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Mittwoch, den **29. Mai 2019, 16:00 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`