UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

4. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 13	Aufgabe 14	Aufgabe 15	Aufgabe 16	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 13 (Quadratische Formen in Normalform, 1 + 2 = 3 Punkte).
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann heißt $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Q(x) := x^t Ax$ quadratische Form auf $\mathbb{R}$. Wir sagen, dass Q sich bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ in Normalform befindet, falls es $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p + q \leq n$ gibt mit

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \quad (Q \circ \Phi_{\mathcal{B}})(y) = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ und $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p + q \leq n$ gibt, so dass sich Q in Normalform bzgl. $\mathcal{B}$ befindet.

(b) Seien nun quadratische Formen Q_i durch die folgenden A_i, $i = 1, 2, 3$, gegeben:
$A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right), A_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
Geben Sie jeweils die Normalform $Q_i \circ \Phi_{\mathcal{B}}$ von Q_i an und skizzieren Sie $(y_1, y_2, (Q_i \circ \Phi_{\mathcal{B}})(y_1, y_2))$ für $y = (y_1, y_2)^t \in [-2, 2]^2$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem. Geben Sie für A_3 die Basis $\mathcal{B}$ aus (a) an.

Lösung:

(a) Sylvesterscher Trägheitssatz $\Rightarrow$ Es gibt $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $p, q \in \mathbb{N}_0$ mit $p + q \leq n$, so dass

$$T^t AT = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad (*)$$

und die Spalten $v_1, ..., v_n$ von T bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$.
Setze $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$. Dann ist $T = T^{\mathcal{B}}_{(e_1,...,e_n)}$ und damit $\tilde{T} = \Phi_{\mathcal{B}}$.
Für $y \in \mathbb{R}^n$ gilt dann:

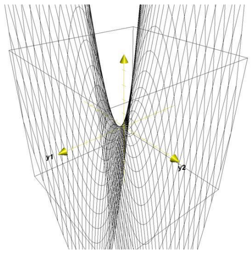
$$(Q \circ \Phi_{\mathcal{B}})(y) \overset{\tilde{T}=\Phi_{\mathcal{B}}}{=} Q(Ty) = (Ty)^t A(Ty) = y^t (T^t AT) y \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2,$$

d.h. Q befindet sich bzgl. $\mathcal{B}$ in Normalform.

(b) Zu bestimmen ist $(p, q) = \text{Signatur}(A)$ sowie T. Wir nutzen simultane Zeilen/Spalten-Umformungen zur Bestimmung:

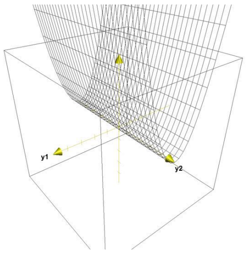
- $$(A_1|E_2) \quad = \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z1+Z2\to Z2, S_1+S_2\to S2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) =: (A_1'|S)$$

  $\Rightarrow \text{Signatur}(A_1) = \text{Signatur}(A_1') = (1, 1)$.
  Normalform Q_1:
  $$(Q_1 \circ \Phi_B)(y) = y_1^2 - y_2^2.$$

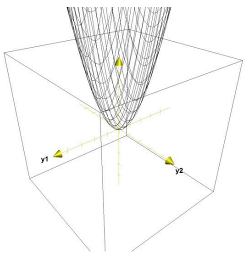
- $$(A_2|E_2) \quad = \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z1+Z2\to Z2, S_1+S_2\to S2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) =: (A_2'|S)$$

  $\Rightarrow \text{Signatur}(A_2) = \text{Signatur}(A_2') = (1, 0)$.
  Normalform Q_2:
  $$(Q_2 \circ \Phi_B)(y) = y_1^2.$$

- $$(A_3|E_2) \quad = \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{Z1+Z2\to Z2, S_1+S_2\to S2}{\to} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) =: (A_3'|S)$$

  $\Rightarrow \text{Signatur}(A_3) = \text{Signatur}(A_3') = (2, 0)$.
  Basis (entsprechend A_3' normierte Zeilen von S): $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = (1, 0)^t$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^t$.
  Normalform Q_3:
  $$(Q_3 \circ \Phi_B)(y) = y_1^2 + y_2^2.$$

Aufgabe 14 (Überprüfung der Definitheit und Angabe von Orthonormalbasen, 6 = 2 + 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und Signatur$(A) = (p, q)$.

(a) Zeigen Sie:

   (i) A positiv semidefinit $\iff q = 0$.

   (ii) A positiv definit $\iff q = 0, p = n$.

   (iii) A indefinit $\iff p > 0, q > 0$.

   Bemerkung: Analoge Aussagen zu (i),(ii) gelten mit negativ (semi-)definit mit vertauschten Rollen für p, q.

Gegeben seien nun die folgenden Matrizen in $M(n \times n, \mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie Signatur(A_i), $i = 1, 2$, und entscheiden Sie, ob diese positiv (semi-)definit, indefinit oder negativ (semi-)definit sind.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums, dass die Matrix A_4 positiv definit ist.

(d) Zeigen Sie: A_3 ist positiv definit. Geben Sie eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \gamma_{A_3})$ an.

Lösung:

(a) Sylvesterscher Trägheitssatz $\Rightarrow$ Es gibt $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $T^t A T = \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ und $(p, q) = $ Signatur(A).
Sei $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ beliebig und $y = T^{-1}x$ (und damit $x = Ty$) $\Rightarrow y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
$\Rightarrow$

$$x^t A x = (Ty)^t A (Ty) = y^t T^t A T y = y^t \begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix} y = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2. \quad (*)$$

- $q = 0 \Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^t A x = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 \geq 0 \Rightarrow A$ positiv semidefinit.
  Sei A positiv semidefinit. Angenommen, $q > 0$. $\Rightarrow$ Setze $y = e_{p+1}$, $x = Ty \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
  $\overset{(*)}{\Rightarrow} x^t A x = -1^2 < 0$, Widerspruch!
- $q = 0$, $p = n \Rightarrow x^t A x = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \overset{y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}}{>} 0 \Rightarrow A$ positiv definit.
  Sei A positiv definit. Angenommen, $p < n \Rightarrow$ Setze $x = Te_{p+1} \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$
  $\Rightarrow x^t A x \leq 0$, Widerspruch!
- $q > 0$, $p > 0 \Rightarrow$ Mit $x = Te_1$ folgt $x^t A x > 0$, mit $x = Te_{p+1}$ folgt $x^t A x < 0 \Rightarrow A$ indefinit.
  Sei A indefinit. Angenommen, $p = 0$ oder $q = 0$.
  Fall 1: $p = 0 \Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^t A x \overset{(*)}{\leq} 0$, Widerspruch.
  Fall 2: $q = 0 \Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x^t A x \overset{(*)}{\geq} 0$, Widerspruch.

(b) A_1:

- Es ist

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z2+Z1\to Z1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{S2+S1\to S1}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{-\frac{2}{3}Z1+Z2\to Z2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{-\frac{2}{3}S1+S2\to S2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\overset{-Z1+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \overset{-S1+S3\to S3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\
&\overset{-3Z2+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{-3S2+S3\to S3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: A_1'.
\end{aligned}
$$

  $\Rightarrow SA_1S^t = A_1'$.
  $\Rightarrow$ Signatur$(A_1) =$ Signatur$(A_1') = (2,1)$.
  $\Rightarrow A_1$ ist indefinit.

- Es ist

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z1+Z2\to Z2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \overset{S1+S2\to S2}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\
&\overset{2Z1+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \overset{2S1+S3\to S3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z2+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \overset{S2+S3\to S3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} =: A_2'.
\end{aligned}
$$

  $\Rightarrow SA_2S^t = A_2'$.
  $\Rightarrow$ Signatur$(A_2) =$ Signatur$(A_2') = (1,2)$.
  $\Rightarrow A_2$ ist indefinit.

Alte Version (nicht aktuell!):

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z1+Z2\to Z2}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \overset{S1+S2\to S2}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \\
&\overset{2Z1+Z3\to Z3}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \overset{2S1+S3\to S3}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z2+Z3\to Z3}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{S2+S3\to S3}{\to} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: A_2'.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow SA_2S^t = A_2'$.
$\Rightarrow$ Signatur(A_2) = Signatur$(A_2') = (0,2)$.
$\Rightarrow A_2$ ist negativ semidefinit.

(c) Es ist $\det(A_4^{(1)}) = \det(1) = 1 > 0$,
$\det(A_4^{(2)}) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2 > 0$,
$\det(A_4^{(3)}) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{Blockmatrix}}{=} 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = 4 \cdot 2 = 8 > 0$,
$\det(A_4) \overset{\text{Laplace S3}}{=} 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 4 \cdot (9 + 0 + 0 - 0 - 4 - 3) = 4 \cdot 2 = 8 > 0$.
$\overset{\text{Hauptminorenkrit.}}{\Rightarrow}$ A_4 positiv definit.

(d) Es ist

$$\begin{aligned}
(A_3|E_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{-Z1+Z2\to Z2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{-S1+S2\to S2}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{-Z1+Z3\to Z3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{-S1+S3\to S3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{3}{2}Z2+Z3\to Z3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{3}{2}S2+S3\to S3}{\to} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) =: (A_3'|S).
\end{aligned}$$

Gemäß A_3' normierte Zeilen von S bilden eine ONB von $(\mathbb{R}^3, \gamma_{A_3})$; hier ist das $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit

$$v_1 = (1,0,0)^t, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^t, \quad v_3 = \sqrt{2}(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 1)^t.$$

Aufgabe 15 (Bestimmung von Orthonormalbasen in Polynomräumen, 1 + 2 = 3 Punkte).

Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ mit Basis $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{-x}$ und ein Skalarprodukt auf V gegeben durch

$$\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \gamma(p, q) := \int_0^\infty \varphi(t)p(t)q(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Bestimmen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis die Gleichung $\int_0^\infty t^k \varphi(t)\mathrm{d}t = k!$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Finden Sie wie in P13 beschrieben eine untere Dreiecksmatrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, so dass $SM^*_{\mathcal{B}}(\gamma)S^t = E_3$, und geben Sie eine Orthonormalbasis von (V, γ) an.
Bemerkung: Die so ermittelten Polynome heißen (bis auf ein eventuell abweichendes Vorzeichen) Laguerre-Polynome.

Lösung:

(a) Mit dem Hinweis gilt:

$$M^*_{\mathcal{B}}(\gamma) = (\gamma(t^i, t^j))_{0 \leq i,j \leq 3} = \left(\int_0^\infty \varphi(t)t^{i+j}\mathrm{d}t\right)_{0 \leq i,j \leq 3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 24 \end{pmatrix}.$$

(b) Simultane Zeilen/Spalten-Umformungen ergeben:

$$\begin{aligned}
(M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)|E_3) &\overset{(-1)Z1+Z2\to Z2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)S1+S2\to S2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 24 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z1+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 20 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)S1+S3\to S3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 20 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-4)Z2+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-4)S2+S3\to S3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -4 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\substack{\frac{1}{2}S3\to S3 \\ \frac{1}{2}Z3\to Z3}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{array}\right) =: (M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)'|S).
\end{aligned}$$

Damit ist $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ die gesuchte Matrix.
Die Zeilen von S bilden eine ONB von $(\mathbb{R}^3, \gamma_{M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)})$, d.h.

$$v_1 := (1, 0, 0)^t, \quad v_2 := (-1, 1, 0)^t, \quad v_3 := \tfrac{1}{2}\,(2, -4, 1)^t.$$

Eine ONB von (V, γ) ist daher gegeben durch:

$$(\Phi_{\mathcal{B}}(v_1), \Phi_{\mathcal{B}}(v_2), \Phi_{\mathcal{B}}(v_3)) = \left(1, t-1, \frac{1}{2}(t^2 - 4t + 2)\right).$$

Aufgabe 16 (Charakterisierung: Positive Definitheit von Matrizen, 4 = 1 + 1 + 0.5 + 1.5 Punkte).

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Für $k \in \{1, ..., n\}$ sei $A^{(k)} := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k}$ die $k \times k$-Untermatrix von A. Dann heißt $\det(A^{(k)})$ die *k-te Hauptminore* von A. In dieser Aufgabe zeigen wir das *Hauptminoren-Kriterium*:

$$A \text{ positiv definit} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Für alle } k \in \{1, ..., n\} \text{ gilt } \det(A^{(k)}) > 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt „$\Rightarrow$“.
Hinweis: Nutzen Sie den Sylvesterschen Trägheitssatz und das Resultat aus A14(a). Warum sind auch $A^{(k)}$, $k = 1, ..., n$ positiv definit?

(b) Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} B & u \\ u^t & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, so gilt

$$\det(A) = \alpha \cdot \det(B) - u^t B^{\#} u.$$

Hinweis: $B^{\#}$ bezeichnet die zu B komplementäre Matrix. Entwickeln Sie $\det(A)$ nach der n-ten Spalte und dann die resultierenden Unterdeterminanten, welche die Zeile u^t enthalten, nach der $(n-1)$-ten Zeile.

(c) Zeigen Sie, dass in der Situation von (b) für $y \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \in \mathbb{R}$ und $x := \left(\begin{smallmatrix} B^{-1}y \\ x_n \end{smallmatrix}\right)$ gilt:

$$x^t A x = (y + x_n u)^t B^{-1} (y + x_n u) + x_n^2 (\alpha - u^t B^{-1} u).$$

(d) Es gilt „$\Leftarrow$“.
Hinweis: Nutzen Sie (b), (c) und P14(c), die Regel $BB^{\#} = \det(B) E_{n-1}$ und vollständige Induktion.

Lösung:

(a) Sei $k \in \{1, ..., n\}$ beliebig.
Wir zeigen: $A^{(k)}$ ist positiv definit: Sei $y \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$. Setze $x := (y, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \Rightarrow y^t A^{(k)} y = x^t A x > 0$.

$A^{(k)}$ positiv definit $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ Es gibt $T \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ mit $T^t A^{(k)} T = E_k$.
$\Rightarrow$

$$1 = \det(E_k) = \det(T^t A^{(k)} T) = \det(T^t) \det(A^{(k)}) \det(T) = \det(T)^2 \det(A^{(k)}).$$

$\overset{T \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})}{\Rightarrow} \det(A^{(k)}) = \frac{1}{\det(T)^2} > 0.$

(b) Entwicklung nach letzter Spalte (A_{in} bezeichnet die Matrix, bei welcher i-te Zeile und n-te Spalte gestrichen wurden, vgl. LA 1, Kapitel 13)

$$\det(A) = \alpha \cdot \det(B) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n+i} u_i \det(A_{in}). \quad (*)$$

Entwicklung von $\det(A_{in})$ nach der $(n-1)$-ten Zeile:

$$\det(A_{in}) = \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-1+j} u_j \det(B_{ij}).$$

Einsetzen in $(*)$ und Nutzen von $(-1)^{2n-1} = -1$:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \alpha \cdot \det(B) - \sum_{i,j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} u_i \det(B_{ij}) u_j \\
&\overset{\text{Def. } (B^{\#})_{ij} = (-1)^{i+j}\det(B_{ij})}{=} \alpha \cdot \det(B) - \sum_{i,j=1}^{n-1} u_i (B^{\#})_{ij} u_j \\
&= \alpha \cdot \det(B) - u^t B^{\#} u
\end{aligned}$$

(c) B ist auch symmetrisch. Daher gilt

$$\begin{aligned}
x^t A x &= (B^{-1}y)^t B (B^{-1}y) + x_n u^t B^{-1} y + x_n (B^{-1}y)^t u + \alpha x_n^2 \\
&= (B^{-1}y)^t B (B^{-1}y) + 2x_n u^t B^{-1} y + \alpha x_n^2 \\
&= y^t B^{-1} y + 2x_n u^t B^{-1} y + \alpha x_n^2 \\
&= (y + x_n u)^t B^{-1} (y + x_n u) + x_n^2 (\alpha - u^t B^{-1} u).
\end{aligned}$$

(d) Beweis von „$\Leftarrow$" mittels vollständiger Induktion nach n:

- Induktionsanfang: $n = 1$: $\det(A^{(1)}) > 0 \overset{A=(a_{11})}{\Rightarrow} a_{11} > 0$.
  Für alle $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ gilt dann: $xAx = x^2 a_{11} > 0$.
- Induktionsvoraussetzung: Die Aussage „$\Leftarrow$" gelte für alle $(n-1)\times(n-1)$-Matrizen A.
- Induktionsschritt: (Bemerkung: Im Falle $n = 2$ gilt die Aussage aus (c) offensichtlich mit $B^{\#} = E_2$)
  Schreibe $A = \left(\begin{smallmatrix} A & u \\ u^t & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ mit $B = A^{(n-1)}$.
  $\Rightarrow$

  $$0 < \det(A) \overset{\text{(c)}, BB^{\#}=\det(B)E_{n-1}}{=} \underbrace{\det(B)}_{>0}(\alpha - u^t B^{-1} u) \quad \Rightarrow \quad \alpha - u^t B^{-1} u > 0. \quad (**)$$

  Sei $x = (x_1, ..., x_n)^t \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ beliebig. Setze $y := B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$, dann ist $x = (B^{-1}y, x_n)$.
  IV $\Rightarrow B = A^{(n-1)}$ ist positiv definit
  $\overset{(b)}{\Rightarrow} B^{-1}$ ist positiv definit.
  - Fall $x_n = 0$: Dann $y \neq 0$, und

    $$x^t A x \overset{(c)}{=} (y + x_n u)^t B^{-1}(y + x_n u) + x_n^2(\alpha - u^t B^{-1} u) = y^t B^{-1} y \overset{B^{-1} \text{ pos. def.}}{>} 0.$$

  - Fall $x_n \not= 0$: Dann

    $$x^t A x \overset{(c)}{=} (y+x_n u)^t B^{-1}(y+x_n u) + x_n^2(\alpha - u^t B^{-1} u) \overset{(**)}{>} (y+x_n u)^t B^{-1}(y+x_n u) \overset{B^{-1} \text{ pos. def.}}{\geq} 0.$$

  Damit ist gezeigt: A ist positiv definit.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **23. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`