UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

4. Abgabeblatt

Aufgabe 13	Aufgabe 14	Aufgabe 15	Aufgabe 16	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 13 (Quadratische Formen in Normalform, 1 + 2 = 3 Punkte).

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Dann heißt $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, Q(x) := x^t A x$ quadratische Form auf $\mathbb{R}$. Wir sagen, dass Q sich bzgl. einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ in Normalform befindet, falls es $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p + q \leq n$ gibt mit

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \quad (Q \circ \Phi_{\mathcal{B}})(y) = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} y_j^2.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^n$ und $p, q \in \mathbb{N}_0$, $p + q \leq n$ gibt, so dass sich Q in Normalform bzgl. $\mathcal{B}$ befindet.

(b) Seien nun quadratische Formen Q_i durch die folgenden A_i, $i = 1, 2, 3$, gegeben:
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
Geben Sie jeweils die Normalform $Q_i \circ \Phi_{\mathcal{B}}$ von Q_i an und skizzieren Sie $(y_1, y_2, (Q_i \circ \Phi_{\mathcal{B}})(y_1, y_2))$ für $y = (y_1, y_2)^t \in [-2, 2]^2$ in einem dreidimensionalen Koordinatensystem. Geben Sie für A_3 die Basis $\mathcal{B}$ aus (a) an.

Aufgabe 14 (Überprüfung der Definitheit und Angabe von Orthonormalbasen, 6 = 2 + 2 + 1 + 1 Punkte).

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und Signatur$(A) = (p, q)$.

(a) Zeigen Sie:

(i) A positiv semidefinit $\iff q = 0$.

(ii) A positiv definit $\iff q = 0, p = n$.

(iii) A indefinit $\iff p > 0, q > 0$.

Bemerkung: Analoge Aussagen zu (i),(ii) gelten mit negativ (semi-)definit mit vertauschten Rollen für p, q.

Gegeben seien nun die folgenden Matrizen in $M(n \times n, \mathbb{R})$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Berechnen Sie Signatur(A_i), $i = 1, 2$, und entscheiden Sie, ob diese positiv (semi-)definit, indefinit oder negativ (semi-)definit sind.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe des Hauptminorenkriteriums, dass die Matrix A_4 positiv definit ist.

(d) Zeigen Sie: A_3 ist positiv definit. Geben Sie eine Orthonormalbasis von $(\mathbb{R}^3, \gamma_{A_3})$ an.

Aufgabe 15 (Bestimmung von Orthonormalbasen in Polynomräumen, 1 + 2 = 3 Punkte).

Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ mit Basis $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$. Sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(x) = e^{-x}$ und ein Skalarprodukt auf V gegeben durch

$$\gamma : V \times V \to \mathbb{R}, \quad \gamma(p, q) := \int_0^\infty \varphi(t)p(t)q(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Bestimmen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.
Hinweis: Nutzen Sie ohne Beweis die Gleichung $\int_0^\infty t^k\varphi(t)\mathrm{d}t = k!$ *für* $k \in \mathbb{N}_0$.

(b) Finden Sie wie in P13 beschrieben eine untere Dreiecksmatrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, so dass $SM^*_{\mathcal{B}}(\gamma)S^t = E_3$, und geben Sie eine Orthonormalbasis von (V, γ) an.
Bemerkung: Die so ermittelten Polynome heißen (bis auf ein eventuell abweichendes Vorzeichen) Laguerre-Polynome.

Aufgabe 16 (Charakterisierung: Positive Definitheit von Matrizen, 4 = 1 + 1 + 0.5 + 1.5 Punkte).

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. Für $k \in \{1, ..., n\}$ sei $A^{(k)} := (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ die $k \times k$-Untermatrix von A. Dann heißt $\det(A^{(k)})$ die *k-te Hauptminore* von A. In dieser Aufgabe zeigen wir das *Hauptminoren-Kriterium*:

$$A \text{ positiv definit} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{Für alle } k \in \{1, ..., n\} \text{ gilt } \det(A^{(k)}) > 0.$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt „$\Rightarrow$“.
Hinweis: Nutzen Sie den Sylvesterschen Trägheitssatz und das Resultat aus A14(a). Warum sind auch $A^{(k)}$, $k = 1, ..., n$ *positiv definit?*

(b) Ist $A = \left(\begin{smallmatrix} B & u \\ u^t & \alpha \end{smallmatrix}\right)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{R}^{n-1}$, $B \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$, so gilt

$$\det(A) = \alpha \cdot \det(B) - u^t B^\# u.$$

Hinweis: $B^\#$ *bezeichnet die zu* B *komplementäre Matrix. Entwickeln Sie* $\det(A)$ *nach der* n*-ten Spalte und dann die resultierenden Unterdeterminanten, welche die Zeile* u^t *enthalten, nach der* $(n-1)$*-ten Zeile.*

(c) Zeigen Sie, dass in der Situation von (b) für $y \in \mathbb{R}^{n-1}, x_n \in \mathbb{R}$ und $x := \left(\begin{smallmatrix} B^{-1}y \\ x_n \end{smallmatrix}\right)$ gilt:

$$x^t Ax = (y + x_n u)^t B^{-1}(y + x_n u) + x_n^2(\alpha - u^t B^{-1}u).$$

(d) Es gilt „$\Leftarrow$“.
Hinweis: Nutzen Sie (b), (c) und P14(c), die Regel $BB^\# = \det(B)E_{n-1}$ *und vollständige Induktion.*

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **23. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`