UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

3. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 9	Aufgabe 10	Aufgabe 11	Aufgabe 12	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 9 (Trigonalisierung einer Matrix, 3 = 0.5 + 2.5 Punkte).
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

Es ist bereits bekannt, dass $\chi_A = (t-2)^4$.

(a) Zeigen Sie anhand von $\mathrm{Eig}(A, 2)$, dass A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Trigonalisieren Sie A, d.h. ermitteln Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.
Verwenden Sie das iterative Verfahren aus der Vorlesung (vgl. Beweis von Satz 17.2).

Lösung:

(a) Es ist $\mathrm{Eig}(A, 2) = \mathrm{Kern}(2 \cdot E_4 - A)$:

$$2 \cdot E_4 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwende (-1)-Trick $\implies$ $\mathrm{Kern}(2 \cdot E_4 - A) = \mathrm{Lin}(v_1)$, wobei $v_1 = (0, 1, 1, 2)^t$. Damit:

$$\mu_{\text{geo}}(A, 2) = 1 \neq 4 = \mu_{\text{alg}}(A, 2),$$

d.h. A ist über $\mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar nach (15.24).

(b) Initialisiere Trigonalisierungs-Algortihmus:

- **Schritt 1**: In (a) wurde $\mathrm{Eig}(A,2)$ bereits ermitelt. Offenbar ist $\mathcal{B}_1 = (v_1, e_1, e_3, e_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Setze $\mathcal{B}_1^- = (e_1, e_3, e_4)$. Setze

$$S_1^{-1} := (v_1, e_1, e_3, e_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\tilde{A}) = S_1 A S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

- **Schritt 2:** Wir trigonalisieren nun die Matrix $A_2' = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
$\chi_{A_2'}$ erfüllt $(t-2)\chi_{A_2'} = \chi_A$, d.h. $\chi_{A_2'} = (t-2)^3$.
Bestimme $\mathrm{Eig}(A_2', 2) = \mathrm{Kern}(2 \cdot E_3 - A_2')$:

$$2 \cdot E_3 - A_2' = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwende (-1)-Trick $\implies$ $\mathrm{Kern}(2 \cdot E_3 - A_2') = \mathrm{Lin}(w_2)$, wobei $w_2 = (-1, 1, 2)^t$.
$\implies v_2 = \Phi_{\mathcal{B}_1^-}(w_2) = -e_1 + e_3 + 2e_4 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.
Offenbar ist $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, e_3, e_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Setze $\mathcal{B}_2^- = (e_3, e_4)$. Setze

$$S_2^{-1} := (v_1, v_2, e_2, e_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\tilde{A}) = S_2 A S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Schritt 3:** Wir trigonalisieren die Matrix $A_3' = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
$\chi_{A_3'}$ erfüllt $(t-2)\chi_{A_3'} = \chi_A$, d.h. $\chi_{A_3'} = (t-2)^2$.
Bestimme $\mathrm{Eig}(A_3', 2) = \mathrm{Kern}(2E_2 - A_3')$:

$$2E_2 - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verwendung (-1)-Trick $\implies$ $\mathrm{Kern}(2E_2 - A_3') = \mathrm{Lin}(w_3)$, wobei $w_3 = (1, 1)^t$.
$\implies v_3 = \Phi_{\mathcal{B}_2^-}(w_3) = e_3 + e_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Offenbar ist $\mathcal{B}_3 = (v_1, v_2, v_3, e_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Setze

$$S_3^{-1} = (v_1, v_2, v_3, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \implies S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3}(\tilde{A}) = S_3 A S_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 10 (Nilpotenz / Anwendung der Trigonalisierung, 5 = 2 + 3 Punkte).

(a) Es sei K ein Körper und $M, N \in M(n \times n, K)$ nilpotente Matrizen.

(i) Es gelte $MN = NM$. Zeigen Sie: Dann ist auch $M + N$ nilpotent.
Hinweis: Nutzen Sie P10(b) mit geeignetem n.

(ii) Zeigen Sie anhand von zwei Beispielen, dass ohne die Voraussetzung $MN = NM$ in (a) die Matrix $M + N$ sowohl nilpotent als auch nicht nilpotent sein kann.
Hinweis: Nutzen Sie für ein Beispiel die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \qquad (*)$$

(i) Finden Sie $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so dass $(*)$ äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Finden Sie $S \in \mathrm{GL}(3, K)$, so dass $SAS^{-1} = J$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(iii) Nutzen Sie die Ergebnisse aus P10(b),(c), um eine explizite Formel für a_n, $n \geq 3$, anzugeben.

Lösung:

(a) (i) Charakterisierung Nilpotenz aus Vorlesung $\Rightarrow M^n = 0,\ N^n = 0$. P10(a), angewandt mit $2n$ statt $n \Rightarrow$

$$(M+N)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} M^k N^{2n-k}$$

In jedem Summanden gilt entweder $k \geq n$ ($\Rightarrow M^k = 0$) oder $2n - k \geq n$ ($\Rightarrow N^{2n-k} = 0$).
$\Rightarrow (M+N)^{2n} = 0$.

(ii)
- $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sind Dreiecksmatrizen, auf der Diagonale stehen Nullen $\Rightarrow \chi_M = \chi_N = t^2$
Charakterisierung Nilpotenz Vorlesung $\Rightarrow M, N$ nilpotent.
(Alternativ kann man einfach $M^2 = N^2 = 0$ zeigen).
Es ist $MN = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $NM = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, d.h. $MN \neq NM$.
$M + N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat $\chi_{M+N} = t^2 - 1$, d.h. $\chi_{M+N} \neq t^2$.
Charakterisierung Nilpotenz Vorlesung $\Rightarrow M + N$ nicht nilpotent.
- M, N sind Dreiecksmatrizen, auf der Diagonale stehen Nullen $\Rightarrow \chi_M = \chi_N = t^3$
Charakterisierung Nilpotenz Vorlesung $\Rightarrow M, N$ nilpotent.
(Alternativ kann man einfach $M^2 = N^2 = 0$ zeigen).
Es ist $MN = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $NM = 0$, d.h. $MN \neq NM$.
$M + N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat $\chi_{M+N} = t^3$.
Charakterisierung Nilpotenz Vorlesung $\Rightarrow M + N$ ist nilpotent.

(b) (i) $(*)$ ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & -12 & 8 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

(ii) Ziel zunächst: Bestimme die Eigenwerte von A über

$$\chi_A = \det(t \cdot E_3 - A) = \det \begin{pmatrix} t-6 & 12 & -8 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & t \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} t^2(t-6) - 8 + 12t = (t-2)^3.$$

Wir erhalten als einzigen Eigenwert $\lambda = 2$.
Starte Trigonalisierungs-Algorithmus:

- **Schritt 1:** $\mathrm{Eig}(A, 2) = \mathrm{Kern}(\lambda \cdot E_3 - A)$:

$$\lambda \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwendung (-1)-Trick $\implies \mathrm{Kern}(\lambda \cdot E_3 - A) = \mathrm{Lin}(v_1)$, wobei $v_1 = (4, 2, 1)^t$.
Offenbar ist $\mathcal{B}_1 := (v_1, e_1, e_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Setze $\mathcal{B}_1^- = (e_1, e_2)$. Setze

$$S_1^{-1} := (v_1, e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(\tilde{A}) = S_1 A S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & -16 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- **Schritt 2:** Wir trigonalisieren nun die Matrix $A_2' = \left(\begin{smallmatrix} 6 & -16 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.
$\chi_{A_2'}$ erfüllt $(t-2)\chi_{A_2'} = \chi_A$, d.h. $\chi_{A_2'} = (t-2)^2$.
Bestimme $\mathrm{Eig}(A_2', 2) = \mathrm{Kern}(2 \cdot E_2 - A_2')$:

$$2 \cdot E_2 - A_2' = \begin{pmatrix} -4 & 16 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verwendung (-1)-Trick $\implies \mathrm{Kern}(2 \cdot E_2 - A_2) = \mathrm{Lin}(w_1)$, wobei $w_2 = (4, 1)^t$.

$\Rightarrow v_2 = \Phi_{\mathcal{B}_2^-}(w_2) = 4e_1 + 1e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Offenbar ist $\mathcal{B}_2 = (v_1, v_2, e_1)$ Basis von $\mathbb{R}^3$. Setze

$$S_2^{-1} := (v_1, v_2, e_1) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(\tilde{A}) = S_2 A S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =: J.$$

(iii) Schreibe $J = D + N$ mit $N = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $D = 2E_3$.
Es gilt $N^3 = 0$, d.h. $N^m = 0$ mit $m = 3$.
P10(b),(c) $\Longrightarrow$ $J^n = D^{n-2} \cdot [D^2 + nND + \binom{n}{2} N^2]$.
Rekursion $\Longrightarrow$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{pmatrix} = \ldots = A^n \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{S^{-1}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)} \quad \underbrace{D^{n-2}}_{=2^{n-2}E_3} \quad \underbrace{\underbrace{[D^2 + nND + \binom{n}{2} N^2]}_{=\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2n & \binom{n}{2} \\ 0 & 4 & 2n \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)} \quad \underbrace{S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}}_{=\begin{pmatrix} 4 - 2n + \binom{n}{2} \\ 2n - 4 \\ 4 \end{pmatrix}} \\
&= 2^{n-2} \begin{pmatrix} 4\binom{n}{2} + 4 \\ 2\binom{n}{2} - 2n + 4 \\ 4 - 2n + \binom{n}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.h. $a_n = 2^{n-2}(4 - 2n + \binom{n}{2})$, $n \geq 3$.

Aufgabe 11 (Beispiele für Bilinearformen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Sei zunächst $V = M(m \times n, K)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, und

$$\gamma : V \times V \to K, \quad \gamma(A, B) := \operatorname{Spur}(A^t B).$$

(i) Zeigen Sie, dass γ eine symmetrische Bilinearform ist.

(ii) Sei $m = n = 2$. Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $K = \mathbb{R}$ mit Basen $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ und $\mathcal{C} = (-1, 1 - t, 1 + t - t^2)$. Gegeben sei folgende symmetrische Bilinearform:

$$\gamma : V \times V \to K, \quad \gamma(p, q) := \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$$

(i) Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

(ii) Berechnen Sie $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ und damit $M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)$.

(iii) Berechnen Sie $\gamma(t - t^2, 2 - t^2)$ unter Verwendung von $M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)$.

Lösung:

(a) (i) Seien $A_1, A_2, A, B \in M(m \times n, K)$ beliebig. Dann ist

$$\gamma(B, A) = \operatorname{Spur}(B^t A) \overset{\operatorname{Spur}(C) = \operatorname{Spur}(C^t)}{=} \operatorname{Spur}(A^t B) = \gamma(A, B).$$

Linearität muss nun nur noch im 1. Argument gezeigt werden. Es ist

$$\begin{aligned}
\gamma(A_1 + A_2, B) &= \mathrm{Spur}(\underbrace{\underbrace{(A_1 + A_2)^t}_{=(A_1^t + A_2^t)} B}_{=A_1^t B + A_2^t B}) \\
&\overset{\text{Spur linear}}{=} \mathrm{Spur}(A_1^t B) + \mathrm{Spur}(A_2^t B) = \gamma(A_1, B) + \gamma(A_2, B),
\end{aligned}$$

und für $\lambda \in K$,

$$\gamma(\lambda A, B) = \mathrm{Spur}(\underbrace{(\lambda A)^t B}_{=\lambda A^t B}) \overset{\text{Spur linear}}{=} \lambda \mathrm{Spur}(A^t B) = \lambda\gamma(A, B).$$

(ii) Es ist (nur obere Dreiecksmatrix muss berechnet werden, Rest ist symmetrisch):

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}}^*(\gamma) &= \begin{pmatrix} \gamma(E_{11}, E_{11}) & \gamma(E_{11}, E_{12}) & \gamma(E_{11}, E_{21}) & \gamma(E_{11}, E_{22}) \\ * & \gamma(E_{12}, E_{12}) & \gamma(E_{12}, E_{21}) & \gamma(E_{12}, E_{22}) \\ * & * & \gamma(E_{21}, E_{21}) & \gamma(E_{21}, E_{22}) \\ * & * & * & \gamma(E_{22}, E_{22}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(b) (i) Es gilt

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{B}}^*(\gamma) &= \big(\gamma(t^i, t^j)\big)_{0 \le i,j \le 2} = \big(\sum_{k=0}^{2} t^{i+j}\big)_{0 \le i,j \le 2} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(ii) Es ist

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(id_V) = \begin{pmatrix} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(-1) & \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(1-t) & \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(1+t-t^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}
M_{\mathcal{C}}^*(\gamma) &= (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^t \cdot M_{\mathcal{B}}^*(\gamma) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(iv) Zur Abkürzung sei $p = t - t^2$ und $q = 2 - t^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\gamma(p, q) &= \Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(p)^t M_{\mathcal{C}}^*(\gamma) \Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4.
\end{aligned}$$

Aufgabe 12 (Quadratische Formen und Bilinearformen, 4 = 1.5 + 1 + 0.5 + 1 Punkte).

Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Eine *quadratische Form* Q ist eine Abbildung $Q : V \to K$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(Q1) $\forall\, \lambda \in K, v \in V : Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ (Homogenität),

(Q2) $\forall\, v, w \in V : Q(v+w) + Q(v-w) = 2Q(v) + 2Q(w)$ (Parallelogrammgleichung).

Sei nun $\gamma \in \operatorname{Bil}_K(V)$ eine symmetrische Bilinearform und setze $q : V \to K, q(v) := \gamma(v,v)$.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung q ist eine quadratische Form.

(b) Zeigen Sie: Für alle $v, w \in V$ gilt: $\gamma(v,w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w))$.

(c) Folgern Sie: Eine symmetrische Bilinearform $\gamma \in \operatorname{Bil}_K(V)$ ist durch Angabe aller Werte $\gamma(v,v)$, $v \in V$ eindeutig bestimmt.

(d) Zeigen Sie, dass die Folgerung in (c) falsch ist, falls γ nicht symmetrisch ist.
Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel γ aus P12(b).

Lösung:

(a) Wir überprüfen die Definition einer quadratischen Form:
Seien $\lambda \in K, v, w \in V$. Dann gilt (Q1), denn:

$$q(\lambda w) \overset{\text{Def.}}{=} \gamma(\lambda w, \lambda w) \overset{\gamma \in \operatorname{Bil}(V),(a)}{=} \lambda\gamma(w, \lambda w) \overset{\gamma \in \operatorname{Bil}(V),(b)}{=} \lambda^2 \gamma(w,w) \overset{\text{Def.}}{=} \lambda^2 q(w).$$

Weiterhin haben wir (Q2), denn:

$$\begin{aligned} q(v+w) + q(v-w) &\overset{\text{Def.}}{=} \gamma(v+w, v+w) + \gamma(v-w, v-w) \\ &\overset{\gamma \in \operatorname{Bil}(V),(a)}{=} \gamma(v, v+w) + \gamma(w, v+w) + \gamma(v, v-w) - \gamma(w, v-w) \\ &\overset{\gamma \in \operatorname{Bil}(V),(b)}{=} \gamma(v,v) + \gamma(v,w) + \gamma(w,v) + \gamma(w,w) \\ &\qquad + \gamma(v,v) - \gamma(v,w) - \gamma(w,v) + \gamma(w,w) \\ &= 2\gamma(v,v) + 2\gamma(w,w) \overset{\text{Def.}}{=} 2q(v) + 2q(w). \end{aligned}$$

(b) Aufgrund der Bilinearität von γ gilt:

$$\begin{aligned} q(v+w) &= \gamma(v+w, v+w) \overset{\gamma \text{ bilin.}}{=} \underbrace{\gamma(v,v)}_{=q(v)} + \gamma(v,w) + \gamma(w,v) + \underbrace{\gamma(w,w)}_{=q(w)} \\ &\overset{\gamma \text{ symm.}}{=} q(v) + q(w) + 2\gamma(v,w). \end{aligned}$$

Durch Umstellen und $\operatorname{char}(K) \neq 2$ folgt:

$$\frac{1}{2}\big(q(v+w) - q(v) - q(w)\big) = \gamma(v,w).$$

(c) Sind $\gamma_1, \gamma_2 \in \operatorname{Bil}_K(V)$ zwei symmetrische Bilinearformen mit $\forall v \in V : q_1(v) = \gamma_1(v,v) = \gamma_2(v,v) =: q_2(v)$. $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ Für $v, w \in V$ gilt

$$\gamma_1(v,w) = \frac{1}{2}\big(q_1(v+w) - q_1(v) - q_1(w)\big) = \frac{1}{2}\big(q_2(v+w) - q_2(v) - q_2(w)\big) = \gamma_2(v,w),$$

d.h. $\gamma_1 = \gamma_2$.

(d) Es gilt $\gamma(v,v) = \det(v,v) = 0$ für alle $v \in V$.
Auch $\tilde{\gamma} : V \times V \to K, \tilde{\gamma}(v,w) := 0$ erfüllt $\tilde{\gamma}(v,v) = 0$ für alle $v \in V$.
Damit gilt $\gamma(v,v) = 0 = \tilde{\gamma}(v,v)$ für alle $v \in V$, aber offensichtlich ist $\gamma \neq \tilde{\gamma}$ (zum Beispiel ist $\gamma((1,1),(1,0)) = -1 \neq 0 = \tilde{\gamma}((1,1),(1,0))$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **16. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`