Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG ZUKUNFT SEIT 1386

3. Abgabeblatt

Aufgabe 9	Aufgabe 10	Aufgabe 11	Aufgabe 12	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 9 (Trigonalisierung einer Matrix, 3 = 0.5 + 2.5 Punkte).
Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

Es ist bereits bekannt, dass $\chi_A = (t-2)^4$.

(a) Zeigen Sie anhand von $\mathrm{Eig}(A, 2)$, dass A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Trigonalisieren Sie A, d.h. ermitteln Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.
Verwenden Sie das iterative Verfahren aus der Vorlesung (vgl. Beweis von Satz 17.2).

Aufgabe 10 (Nilpotenz / Anwendung der Trigonalisierung, 5 = 2 + 3 Punkte).

(a) Es sei K ein Körper und $M, N \in M(n \times n, K)$ nilpotente Matrizen.

  (i) Es gelte $MN = NM$. Zeigen Sie: Dann ist auch $M + N$ nilpotent.
  Hinweis: Nutzen Sie P10(b) mit geeignetem n.

  (ii) Zeigen Sie anhand von zwei Beispielen, dass ohne die Voraussetzung $MN = NM$ in (a) die Matrix $M + N$ sowohl nilpotent als auch nicht nilpotent sein kann.
  Hinweis: Nutzen Sie für ein Beispiel die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ und

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3, \qquad (*)$$

  (i) Finden Sie $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so dass $(*)$ äquivalent ist zu

$$\left(\begin{smallmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \\ a_n \end{smallmatrix}\right) = A \cdot \left(\begin{smallmatrix} a_{n+1} \\ a_n \\ a_{n-1} \end{smallmatrix}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Finden Sie $S \in \mathrm{GL}(3, K)$, so dass $SAS^{-1} = J$ eine obere Dreiecksmatrix ist.

(iii) Nutzen Sie die Ergebnisse aus P10(b),(c), um eine explizite Formel für a_n, $n \geq 3$, anzugeben.

Aufgabe 11 (Beispiele für Bilinearformen, 4 = 2 + 2 Punkte).
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Sei zunächst $V = M(m \times n, K)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$, und

$$\gamma : V \times V \to K, \quad \gamma(A, B) := \mathrm{Spur}(A^t B).$$

(i) Zeigen Sie, dass γ eine symmetrische Bilinearform ist.

(ii) Sei $m = n = 2$. Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$ bzgl. der Standardbasis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

(b) Sei nun $V = \mathbb{R}[t]_{\leq 2}$, $K = \mathbb{R}$ mit Basen $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ und $\mathcal{C} = (-1, 1 - t, 1 + t - t^2)$. Gegeben sei folgende symmetrische Bilinearform:

$$\gamma : V \times V \to K, \quad \gamma(p, q) := \sum_{i=0}^{2} p(i)q(i)$$

(i) Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

(ii) Berechnen Sie $T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ und damit $M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)$.

(iii) Berechnen Sie $\gamma(t - t^2, 2 - t^2)$ unter Verwendung von $M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)$.

Aufgabe 12 (Quadratische Formen und Bilinearformen, 4 = 1.5 + 1 + 0.5 + 1 Punkte).
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Eine *quadratische Form Q* ist eine Abbildung $Q : V \to K$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

(Q1) $\forall\, \lambda \in K, v \in V : Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$ (Homogenität),

(Q2) $\forall\, v, w \in V : Q(v + w) + Q(v - w) = 2Q(v) + 2Q(w)$ (Parallelogrammgleichung).

Sei nun $\gamma \in \mathrm{Bil}_K(V)$ eine symmetrische Bilinearform und setze $q : V \to K, q(v) := \gamma(v, v)$.

(a) Zeigen Sie: Die Abbildung q ist eine quadratische Form.

(b) Zeigen Sie: Für alle $v, w \in V$ gilt: $\gamma(v, w) = \frac{1}{2}(q(v + w) - q(v) - q(w))$.

(c) Folgern Sie: Eine symmetrische Bilinearform $\gamma \in \mathrm{Bil}_K(V)$ ist durch Angabe aller Werte $\gamma(v, v)$, $v \in V$ eindeutig bestimmt.

(d) Zeigen Sie, dass die Folgerung in (c) falsch ist, falls γ nicht symmetrisch ist.
Hinweis: Verwenden Sie zum Beispiel γ aus P12(b).

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **16. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`

Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

3. Präsenzblatt

Aufgabe P9 (Trigonalisierung einer Matrix).

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

Es ist bereits bekannt, dass $\chi_A = (t-1)^2(t-2)^2$.

(a) Zeigen Sie anhand von $\mathrm{Eig}(A, 1)$, dass A nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Trigonalisieren Sie A, d.h. geben Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Q})$ an, so dass SAS^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.
Durchlaufen Sie die Eigenwerte im iterativen Verfahren in der Reihenfolge $1, 1, 2, 2$.

Aufgabe P10 (Nilpotenz und Anwendung der Trigonalisierung).

Es sei K ein Körper und $D, N \in M(n \times n, K)$.

(a) Sei N nilpotent und $DN = ND$. Zeigen Sie: Dann ist auch DN nilpotent.

(b) Es gelte $DN = ND$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass

$$(D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}.$$

Hinweis: Nutzen Sie zum Beweis vollständige Induktion und die Eigenschaft $\binom{m}{j} + \binom{m}{j-1} = \binom{m+1}{j}$ *des Binomialkoeffizienten für* $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$.

(c) Sei N nilpotent mit $N^m = 0$ ($m \in \mathbb{N}$) und $DN = ND$. Zeigen Sie unter Nutzung von (a), dass für $n \geq m-1$ gilt:

$$(D+N)^n = D^{n-m+1} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n}{k} N^k D^{m-1-k}.$$

(d) Es sei $J \in M(n \times n, K)$ eine obere Dreiecksmatrix mit gleichen Diagonaleinträgen $\lambda \in K$. Definiere $D := \lambda \cdot E_n$ und $N := J - D$ (und damit $J = D + N$). Zeigen Sie, dass N nilpotent ist und $DN = ND$ gilt.

(e) Wir betrachten die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegeben durch $a_0 = a_1 = 1$ und

$$a_{n+1} = 6a_n - 9a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad (*).$$

- Finden Sie $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass $(*)$ äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Finden Sie $S \in \mathrm{GL}(2, K)$, so dass $SAS^{-1} = J$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
- Nutzen Sie die Ergebnisse aus P10(b) und (c), um eine explizite Formel für a_n, $n \geq 2$, anzugeben.

Aufgabe P11 (Rechnen mit Bilinearformen und deren Darstellungsmatrix).
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob es sich bei den folgenden Abbildungen $\gamma : V \times V \to K$ um Bilinearformen oder sogar um symmetrische Bilinearformen handelt:

(i) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2 + y_1y_2$,

(ii) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + y_1$,

(iii) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$,

(iv) $\gamma((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

(b) Sei nun $V = K[t]_{\leq 2}$, und $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ die Monombasis von V sowie $\mathcal{C} = (1 + t, 1 + t + t^2, 1 - t)$ eine weitere Basis von V. Eine Abbildung $\gamma : V \times V \to K$ sei gegeben durch

$$\gamma(p, q) := p(1)q(1) - p(0)q(0).$$

(i) Zeigen Sie, dass γ eine symmetrische Bilinearform ist.

(ii) Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

(iii) Ermitteln Sie $T^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

(iv) Berechnen Sie $M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)$ mittels der Basiswechselformel für Bilinearformen.

(v) Seien $p := 2 + t, q = 3t + t^2 \in K[t]_{\leq 2}$. Berechnen Sie $\gamma(p, q)$ mit Hilfe von $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$.

Aufgabe P12 (Alternierende Bilinearformen).
Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Eine Bilinearform $\tau \in \mathrm{Bil}_K(V)$ heißt *alternierend*, falls

$$\forall v, w \in V : \quad \tau(v, w) = -\tau(w, v).$$

Sei $\gamma \in \mathrm{Bil}_K(V)$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt $\gamma_a, \gamma_s \in \mathrm{Bil}_K(V)$ mit $\gamma = \gamma_a + \gamma_s$, so dass γ_a alternierend und γ_s symmetrisch ist.

(b) Sei $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$. Es sei $\gamma((v_1, v_2), (w_1, w_2)) := \det\begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass γ eine alternierende Bilinearform ist.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`