Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

2. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 5 (Minimalpolynome und Inverse, 4 = 3 + 1 Punkte).
Seien nun $\varphi_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k)$ gegeben durch $\varphi_i = \tilde{A}_i$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die folgenden charakteristischen Polynome sind bereits bekannt:

$$\chi_{A_1} = (t-3)(t-2)^2, \quad \chi_{A_2} = t^3,$$

(a) Lösen Sie die folgenden Aufgaben für $i = 1, 2, 3$:

(i) Ermitteln Sie das Minimalpolynom μ_{A_i}.
Nutzen Sie bei A_3 ohne Beweis: Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so gilt stets auch $\chi_\varphi | \mu_\varphi^{dim(V)}$.

(ii) Nutzen Sie (i), um zu entscheiden, ob φ_i diagonalisierbar ist.

(iii) Ist φ_i bijektiv? Geben Sie dann ein Polynom $p \in \mathbb{R}[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_{\varphi_i}) - 1$ an mit $\varphi_i^{-1} = p(\varphi_i)$.

(b) Geben Sie jeweils eine Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ an, welche die angegebenen Minimal- und charakteristischen Polynome aus $\mathbb{R}[t]$ besitzt.

(i) $\chi_A = t^2(t-2)^2$ und $\mu_A = t(t-2)$.

(ii) $\chi_A = (t-1)^2(t-2)(t-3)$ und $\mu_A = \chi_A$.

Lösung:

(a) (i) • Es ist $\mu_{A_1} \in \{(t-2)(t-3), (t-3)(t-2)^2\}$. Mit $p = (t-2)(t-3)$ gilt:

$$p(A_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0,$$

d.h. $\mu_{A_1} = (t-3)(t-2)$.

- Es ist $\mu_{A_2} \in \{t, t^2, t^3\}$. Hier ist

$$A_2 \neq 0, \quad A_2^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

d.h. $\mu_{A_2} = t^3$.

- Bestimme das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_{A_3} &= \det(tE_3 - A_3) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & t-3 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Blockmatrix}}{=} \det \begin{pmatrix} t-3 & 3 \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} t-1 & -3 \\ 1 & t-3 \end{pmatrix} \\ &= [(t-3)(t-1)+3]^2 = [(t-2)^2+2]^2. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $(t-2)^2+2 \in \mathbb{R}[t]$ über $\mathbb{R}[t]$ irreduzibel ist: Seien $f, g \in \mathbb{R}[t]$ mit $(t-2)^2+2 = f \cdot g$. $\overset{\text{Gradformel}}{\Rightarrow}$ $2 = \operatorname{grad}(f) + \operatorname{grad}(g)$.
Falls $\operatorname{grad}(f) = 0$ oder $\operatorname{grad}(g) = 0$, so ist $f \in \mathbb{R}^*$ oder $g \in \mathbb{R}^* \Rightarrow f \in \mathbb{R}[t]^*$ oder $g \in \mathbb{R}[t]^*$
Falls $\operatorname{grad}(f) = 1 = \operatorname{grad}(g)$, so wären f, g Linearfaktoren und hätten Nullstellen $\Rightarrow$ auch $(t-2)^2+2$ hätte Nullstellen in $\mathbb{R}$, Widerspruch! Dieser Fall kann also nicht eintreten.

$\mu_{A_4} | \chi_{A_4} | \mu_{A_4}^4 \implies \chi_{A_4}$ enthält genau die irreduziblen Faktoren von μ_{A_4}, aber eventuell in geringerer Potenz (mindestens jedoch einmal).
$\Rightarrow \mu_{A_4} \in \{(t-2)^2+2, ((t-2)^2+2)^2\}$.
Es ist

$$(A-2E_4)^2 + 2E_4 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2 + 2E_4 = (-2E_4) + 2E_4 = 0,$$

d.h. $\mu_{A_3} = (t-2)^2 + 2$.

(ii) Wir verwenden Satz (16.9):

- A_1 ist diagonalisierbar, da μ_{A_1} in Linearfaktoren zerfällt und nur einfache Nullstellen besitzt.
- A_2 ist nicht diagonalisierbar, da μ_{A_2} eine dreifache Nullstelle bei $\lambda = 0$ besitzt.
- A_3 ist nicht diagonalisierbar, da μ_{A_3} nicht in Linearfaktoren zerfällt.

(iii) Sei $\varphi \in \operatorname{Aut}_K(V)$ und $\mu_\varphi = \sum_{k=0}^n c_k t^k$ das Minimalpolynom von φ.
$\overset{\text{P8(a)}}{\Longrightarrow}$ $\varphi^{-1} = p(\varphi)$, wobei $p = -\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{c_0} t^{k-1}$.

- χ_{A_1} hat genau die Nullstellen $\lambda \in \{2, 3\} \Rightarrow$ kein Eigenwert von φ_1 ist $0 \Rightarrow \varphi_1$ bijektiv
Es ist $\mu_{A_2} = t^2 - 5t + 6$.
$\Rightarrow p = -\frac{1}{6}t + \frac{5}{6}$.
- $\lambda = 0$ ist Nullstelle von χ_{A_2}, d.h. Eigenwert von $\varphi_2 \implies \varphi_2$ nicht bijektiv
- χ_{A_3} hat keine Nullstellen $\Rightarrow$ kein Eigenwert von φ_3 ist $0 \Rightarrow \varphi_3$ bijektiv
Es ist $\mu_{A_3} = t^2 - 4t + 6$.
$\Rightarrow p = -\frac{1}{6}t + \frac{4}{6}$.

(b) (i) μ_A zerfällt in Linearfaktoren mit einfachen Nullstellen $\Rightarrow A$ diagonalisierbar; lese Eigenwerte aus χ_A ab und wähle A direkt als die passende Diagonalmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(ii) μ_A hat doppelte Nullstelle bei $1 \Rightarrow A$ nicht diagonalisierbar; lese Eigenwerte aus χ_A ab und wähle A als entsprechende Diagonalmatrix; füge dann aber über dem doppelten Eigenwert eine 1 hinzu, um die Dimension des Eigenraums zu verringern:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen zwischen Polynomräumen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $K[t]_{\leq n} := \{p \in K[t] : \operatorname{grad}(g) \leq n\}$ ist wie in P7 erklärt ein Vektorraum über K. Es sei $\mathcal{B} = (1, t, ..., t^n)$ die Monombasis. Im Folgenden betrachten wir die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \varphi_1 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, &\qquad f \mapsto f(t+1) + f(t) - f(-t), \\ \varphi_2 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, &\qquad f \mapsto f(0) + f(1)t + \big[f(1) + f(-1)\big]t^2. \end{aligned}$$

Sei nun $K = \mathbb{Q}$. Betrachten Sie die folgenden Aufgaben jeweils für $i = 1, 2$:

(a) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_i)$.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_{φ_i}.

(c) Berechnen Sie das Minimalpolynom μ_{φ_i}.

(d) Entscheiden Sie auf Basis von (c), ob φ_i diagonalisierbar ist.
Geben Sie gegebenenfalls eine Basis $\mathcal{B}'$ aus Eigenvektoren an, so dass $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi_i)$ diagonal ist.

Lösung:

Für φ_1:

(a) Es ist

$$\varphi_1(1) = 1, \quad \varphi_1(t) = 1 + 3t, \quad \varphi_1(t^2) = 1 + 2t + t^2,$$

damit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\chi_{\varphi_1} = \det(tE_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)) = \det \begin{pmatrix} t-1 & -1 & -1 \\ 0 & t-3 & -2 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \overset{\text{Diag.matrix}}{=} (t-1)^2(t-3)$$

(c) Mögliche Minimalpolynome sind μ_{φ_1} sind alle Polynome aus der Menge $H := \{(t-1)(t-3), (t-1)^2(t-1)\}$. Hier ist

$$p = (t-1)(t-3) \in K[t] \Rightarrow p(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0.$$

$\implies \mu_{\varphi_1} = (t-1)(t-3)$.

(d) μ_{φ_1} zerfällt in Linearfaktoren mit einfachen Nullstellen. Damit ist φ_1 diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.
Berechnung der Eigenvektoren mit Hilfe der Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)$: Eigenwerte von φ_1 sind Nullstelle von $\mu_{\varphi_1} \Rightarrow$ Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

- $\mathrm{Eig}(\varphi_1, 1) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Eig}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1), 1)) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Kern}(E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)))$,

$$E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1))$ ist (w_1, w_2) mit $w_1 = (1,0,0)^t$ und $w_2 = (0,-1,1)$.
$\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi_1, 1)$ ist (v_1, v_2) mit $v_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(w_1) = 1$ und $v_2 = \Phi_{\mathcal{B}}(w_2) = t^2 - t$.

- $\mathrm{Eig}(\varphi_1, 3) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Eig}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1), 3)) = \Phi_{\mathcal{B}}(\mathrm{Kern}(3E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)))$,

$$3E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(3E_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1))$ ist (w_3) mit $w_3 = (1,2,0)^t$.
$\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(\varphi_1, 3)$ ist (v_3) mit $v_3 = \Phi_{\mathcal{B}}(w_3) = 1 + 2t$.

Mit $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3) = (1, t^2 - t, 1 + 2t)$ gilt also $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Für φ_2:

(a) Es ist

$$\varphi_2(1) = 1 + t + 2t^2, \quad \varphi_2(t) = t, \quad \varphi_2(t^2) = t + 2t^2,$$

damit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\chi_{\varphi_2} = \det(tE_3 - M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_2)) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ -1 & t-1 & -1 \\ -2 & 0 & t-2 \end{pmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} (t-1)^2(t-2)$$

(c) Mögliche Minimalpolynome μ_{φ_2} sind alle Polynome aus der Menge $H := \{(t-1)(t-2), (t-1)^2(t-2)\}$. Hier ist

$$p \quad = \quad (t-1)(t-2) \in K[t] \Rightarrow p(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0,$$

damit ist $\mu_{\varphi_2} = (t-1)^2(t-2)$.

(d) μ_{φ_2} zerfällt in Linearfaktoren, aber hat doppelte Nullstelle $\lambda = 1 \Rightarrow \varphi_2$ ist nicht diagonalisierbar über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 7 (Minimalpolynome von Endomorphismen, 4 = 1.5 + 2.5 Punkte).
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$.

(a) Sei $f^2 = f$. Bestimmen Sie die möglichen Minimalpolynome von f und zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

(b) (i) Zeigen Sie: In $K[t]$ gilt $\mu_{f\circ g} | t \cdot \mu_{g\circ f}$.

(ii) Im Allgemeinen gilt jedoch nicht $\mu_{f\circ g} = \mu_{g\circ f}$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ an.
Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die durch die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ *induzierten linearen Abbildungen.*

Lösung: (a) Es $f^2 - f = 0$, d.h. $p = t^2 - t = t(t-1) \in K[t]$ erfüllt $p(f) = 0$.
$\overset{\text{Def. } \mu_f}{\Longrightarrow} \mu_f | p$
$\Longrightarrow \mu_f \in \{t, t-1, t(t-1)\}$.
Alle drei Minimalpolynome sind möglich: Falls $f \equiv 0$, ist $\mu_f = t$; falls $f = \mathrm{id}_V$, ist $\mu_f = t - 1$.
In jedem Fall $\mu_f \in \{t, t-1, t(t-1)\}$ zerfällt μ_f in Linearfaktoren und besitzt nur einfache Nullstellen $\Longrightarrow$ f diagonalisierbar.

(b) (a) Sei $\mu_{g\circ f} = \sum_{j=0}^{n} c_j t^j$ und $p := t \cdot \mu_{g\circ f}$. Dann ist

$$\begin{aligned} p(f\circ g) &= (f\circ g) \circ \sum_{j=0}^{n} c_j (f\circ g)^j \overset{\text{linear}}{=} f \circ \sum_{j=0}^{n} c_j \underbrace{g\circ (f\circ g)^j}_{=g\circ f\circ g\circ f \ldots \circ f\circ g = (g\circ f)^j \circ g} \\ &\overset{\text{Def. Add. lin. Abb.}}{=} f \circ \left(\sum_{j=0}^{n} c_j (g\circ f)^j \right) \circ g \\ &= f \circ \underbrace{\mu_{g\circ f}(g\circ f)}_{=0} \circ g = 0. \end{aligned}$$

Nach Definition von $\mu_{f\circ g}$ folgt $\mu_{f\circ g} | p$.

(b) Sei $f = \tilde{A}_1$, $g = \tilde{A}_2$ mit $A_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$f\circ g = \tilde{B}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g\circ f = \tilde{C}, \qquad C := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist $\chi_{f\circ g} = \det(tE_2 - B) = t^2 \overset{B\neq 0}{\Rightarrow} \mu_{f\circ g} = t^2$.
Es ist $\chi_{g\circ f} = \det(tE_2 - C) = t^2 \overset{C=0}{\Rightarrow} \mu_{f\circ g} = t$.
Damit gilt hier $\mu_{f\circ g} \neq \mu_{g\circ f}$.

Aufgabe 8 (Charakterisierung simultaner Diagonalisierbarkeit, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Gegeben sei ein K-Vektorraum V, $\dim_K(V) < \infty$, und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Zwei Endomorphismen f, g heißen simultan diagonalisierbar, falls eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)$ gleichzeitig Diagonalmatrizen sind. Wir wollen zeigen:

$$f, g \text{ simultan diagonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad f, g \text{ diagonalisierbar und } f \circ g = g \circ f.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie die Implikation „$\Rightarrow$“.

Wir bezeichnen einen Untervektorraum $W \subseteq V$ als g-invariant, wenn $g(W) \subseteq W$.

(b) Es gelte $f \circ g = g \circ f$. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass $W := \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ g-invariant ist.

(c) Sei g diagonalisierbar. Zeigen Sie: Ist $W \subseteq V$ g-invariant, so ist die Einschränkung $g|_W : W \to W$ diagonalisierbar.
Hinweis: Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von $g|_W$ in Linearfaktoren zerfällt.

(d) Zeigen Sie mittels (b) und (c) die Implikation „$\Leftarrow$“.
Hinweis: Geben Sie eine Basis aus Eigenvektoren von g an, die gleichzeitig Eigenvektoren von f sind.

Lösung:

(a) f und g simultan diagonalisierbar $\Rightarrow$ Es gibt Basis $\mathcal{B}$ von V mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = D_1, \qquad M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = D_2,$$

wobei $D_1, D_2 \in K^{n \times n}$ Diagonalmatrizen sind. Diagonalmatrizen kommutieren. Damit folgt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ g) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) = D_1 D_2 \;=\; D_2 D_1 = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g) M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g \circ f).$$

Da $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} : \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{Mat}(n \times n, K)$ ein Isomorphismus ist, folgt $f \circ g = g \circ f$.

(b) Wir zeigen $v \in W \implies g(v) \in W$.
Sei $v \in W$. Dann gilt:

$$f(g(v)) \overset{f \circ g = g \circ f}{=} g(f(v)) = g(\lambda v) \overset{\text{linear}}{=} \lambda g(v).$$

$\implies g(v)$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von f, d.h. $g(v) \in W$.
Da $v \in W$ beliebig war, folgt $g(W) \subseteq W$.

(c) Sei μ_g das Minimalpolynom von g.
Für alle $w \in W$ gilt:

$$\mu_g(g|_W)(w) = \mu_g(g)(w) \overset{\mu_g(g)=0}{=} 0.$$

$\implies \mu_g(g|_W) = 0 \overset{\text{Def. } \mu_{g|_W}}{\Rightarrow} \mu_{g|_W} \mid \mu_g$.
g diagonalisierbar $\Rightarrow \mu_g = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ $(*)$.
$\overset{(*)}{\implies} \mu_{g|_W} = (t - \lambda_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{s_k}$ mit $s_i \in \{0, 1\}$
$\implies \mu_{g|_W}$ zerfällt in Linearfaktoren und hat nur einfache Nullstellen
$\implies g|_W$ diagonalisierbar.

(d) Seien $\lambda_1, ..., \lambda_k \in K$ alle Eigenwerte von f.
Da f diagonalisierbar ist, gilt

$$V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k).$$

$f \circ g = g \circ f$. $\overset{\text{(b)}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ ist g-invariant $(i = 1, ..., k)$.
$\overset{\text{(c), } g \text{ diagonalisierbar}}{\Longrightarrow}$ $g|_{\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)}$ diagonalisierbar $(i = 1, ..., k)$.
$\Longrightarrow$ $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ besitzt eine Basis $\mathcal{C}_i$ von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ aus Eigenvektoren von $g|_{\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)}$, $i = 1, ..., k$.
Die Elemente von $\mathcal{C}_i$ sind auch Eigenvektoren von g (da $g|_{\mathrm{Eig}(f,\lambda_i)}$ nur Einschränkung) und natürlich auch Eigenvektoren von f (da es Elemente von $\mathrm{Eig}(f, \lambda_i)$ sind).
Damit ist

$$\mathcal{B} := \mathcal{C}_1 \cup ... \cup \mathcal{C}_k$$

eine Basis von

$$V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus ... \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_k)$$

derart, dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f), M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$ gleichzeitig Diagonalgestalt haben.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **09. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`