Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

2. Abgabeblatt

Aufgabe 5	Aufgabe 6	Aufgabe 7	Aufgabe 8	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 5 (Minimalpolynome und Inverse, 4 = 3 + 1 Punkte).
Seien nun $\varphi_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k)$ gegeben durch $\varphi_i = \tilde{A}_i$ mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die folgenden charakteristischen Polynome sind bereits bekannt:

$$\chi_{A_1} = (t-3)(t-2)^2, \quad \chi_{A_2} = t^3,$$

(a) Lösen Sie die folgenden Aufgaben für $i = 1, 2, 3$:

(i) Ermitteln Sie das Minimalpolynom μ_{A_i}.
Nutzen Sie bei A_3 ohne Beweis: Ist $\varphi : V \to V$ ein Endomorphismus, so gilt stets auch $\chi_\varphi | \mu_\varphi^{dim(V)}$.

(ii) Nutzen Sie (i), um zu entscheiden, ob φ_i diagonalisierbar ist.

(iii) Ist φ_i bijektiv? Geben Sie dann ein Polynom $p \in \mathbb{R}[t]$ mit $\mathrm{grad}(p) = \mathrm{grad}(\mu_{\varphi_i}) - 1$ an mit $\varphi_i^{-1} = p(\varphi_i)$.

(b) Geben Sie jeweils eine Matrix $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ an, welche die angegebenen Minimal- und charakteristischen Polynome aus $\mathbb{R}[t]$ besitzt.

(i) $\chi_A = t^2(t-2)^2$ und $\mu_A = t(t-2)$.

(ii) $\chi_A = (t-1)^2(t-2)(t-3)$ und $\mu_A = \chi_A$.

Aufgabe 6 (Diagonalisierbarkeit von Endomorphismen zwischen Polynomräumen, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $K[t]_{\leq n} := \{p \in K[t] : \mathrm{grad}(g) \leq n\}$ ist wie in P7 erklärt ein Vektorraum über K. Es sei $\mathcal{B} = (1, t, ..., t^n)$ die Monombasis. Im Folgenden betrachten wir die linearen Abbildungen

$$\varphi_1 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, \qquad f \mapsto f(t+1) + f(t) - f(-t),$$
$$\varphi_2 : K[t]_{\leq 2} \to K[t]_{\leq 2}, \qquad f \mapsto f(0) + f(1)t + \big[f(1) + f(-1)\big]t^2.$$

Sei nun $K = \mathbb{Q}$. Betrachten Sie die folgenden Aufgaben jeweils für $i = 1, 2$:

(a) Berechnen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi_i)$.

(b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom χ_{φ_i}.

(c) Berechnen Sie das Minimalpolynom μ_{φ_i}.

(d) Entscheiden Sie auf Basis von (c), ob φ_i diagonalisierbar ist.
Geben Sie gegebenenfalls eine Basis $\mathcal{B}'$ aus Eigenvektoren an, so dass $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi_i)$ diagonal ist.

Aufgabe 7 (Minimalpolynome von Endomorphismen, 4 = 1.5 + 2.5 Punkte).
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$.

(a) Sei $f^2 = f$. Bestimmen Sie die möglichen Minimalpolynome von f und zeigen Sie, dass f diagonalisierbar ist.

(b) (i) Zeigen Sie: In $K[t]$ gilt $\mu_{f\circ g} | t \cdot \mu_{g\circ f}$.
   (ii) Im Allgemeinen gilt jedoch nicht $\mu_{f\circ g} = \mu_{g\circ f}$. Geben Sie ein Gegenbeispiel für den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ an.
   Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die durch die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ *induzierten linearen Abbildungen.*

Aufgabe 8 (Charakterisierung simultaner Diagonalisierbarkeit, 4 = 1 + 1 + 1 + 1 Punkte).
Gegeben sei ein K-Vektorraum V, $\dim_K(V) < \infty$, und $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$. Zwei Endomorphismen f, g heißen simultan diagonalisierbar, falls eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ und $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(g)$ gleichzeitig Diagonalmatrizen sind. Wir wollen zeigen:

$$f, g \text{ simultan diagonalisierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad f, g \text{ diagonalisierbar und } f \circ g = g \circ f.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie die Implikation „$\Rightarrow$“.

Wir bezeichnen einen Untervektorraum $W \subseteq V$ als g-invariant, wenn $g(W) \subseteq W$.

(b) Es gelte $f \circ g = g \circ f$. Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von f. Zeigen Sie, dass $W := \mathrm{Eig}(f, \lambda)$ g-invariant ist.

(c) Sei g diagonalisierbar. Zeigen Sie: Ist $W \subseteq V$ g-invariant, so ist die Einschränkung $g|_W : W \to W$ diagonalisierbar.
Hinweis: Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom von $g|_W$ in Linearfaktoren zerfällt.

(d) Zeigen Sie mittels (b) und (c) die Implikation „$\Leftarrow$“.
Hinweis: Geben Sie eine Basis aus Eigenvektoren von g an, die gleichzeitig Eigenvektoren von f sind.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **09. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`