Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

1. Abgabeblatt – Lösungen

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 1 (Diagonalisierbarkeit von Matrizen, 9 = 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

aus $M(3 \times 3, K)$ über dem Körper $K = \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie für die Matrix A_k jeweils das charakteristische Polynom χ_{A_k}, und berechnen Sie die Eigenwerte λ von A_k in K und deren algebraische Vielfachheiten $\mu_{alg}(A, \lambda)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

(b) Entscheiden Sie für A_1, A_2 nur mit Hilfe der Ergebnisse aus (a), ob diese über K diagonalisierbar sind.

(c) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten λ gehörigen Eigenräume $\mathrm{Eig}(A_k, \lambda)$ von A_k und geben Sie die geometrische Vielfachheiten $\mu_{geo}(A_k, \lambda)$ an $(k = 3, 4)$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $\mathrm{Eig}(A_3, 3) = \mathrm{Lin}((-1, 0, 1)^t)$ *und* $\mathrm{Eig}(A_4, 0) = \mathrm{Lin}((1, 2, 1)^t)$.

(d) Entscheiden Sie für A_3, A_4 nur mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) und (c), ob diese über K diagonalisierbar sind.

(e) Geben Sie eine Basis von K^3 aus Eigenvektoren von A_3 an, sowie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$, so dass $T^{-1} A_3 T = D$.

Sei nun $K = \mathbb{C}$.

(f) Zeigen Sie, dass A_2 nun über K diagonalisierbar ist und geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$ an, so dass $T^{-1}A_2T = D$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $\mathrm{Eig}(A_2, 0) = \mathrm{Lin}((1, 1, 0)^t)$ *und* $\mathrm{Eig}(A_2, i) = \mathrm{Lin}((1 + i, 2i, 2)^t)$.

Lösung:

(a)

- $$\begin{aligned}\chi_{A_1}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_1) = \det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ 0 & \lambda-1 & -3\\ 0 & -3 & \lambda-1\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Blockmatrix}}{=} (\lambda-1)\cdot\det\begin{pmatrix}\lambda-1 & -3\\ -3 & \lambda-1\end{pmatrix} = (\lambda-1)\big[(\lambda-1)^2 - 3^2\big]\\ &= (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2).\end{aligned}$$

  Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\chi_{A_1}(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{-2, 1, 4\}$
  $\Rightarrow$ Eigenwerte von A_1 sind $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$, und

  $$\mu_{alg}(A_1, -2) = \mu_{alg}(A_1, 1) = \mu_{alg}(A_1, 4) = 1.$$

- $$\begin{aligned}\chi_{A_2}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_2) = \det\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 2 & -2 & \lambda-1\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda+1)\lambda(\lambda-1) - 2 - (-2)(\lambda+1) = \lambda(\lambda^2+1).\end{aligned}$$

  Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\chi_{A_2}(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$
  $\Rightarrow$ Nur $\lambda_1 = 0$ ist Eigenwert von A_2 und $\mu_{alg}(A_2, 0) = 1$.

- $$\begin{aligned}\chi_{A_3}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_3) = \det\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 2\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 2 & 0 & \lambda-1\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-1) - 4(\lambda+1)\\ &= (\lambda+1)\big[(\lambda-1)^2 - 4\big]\\ &= (\lambda+1)^2(\lambda-3).\end{aligned}$$

  Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\chi_{A_3}(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{-1, 3\}$
  $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$ sind die Eigenwerte von A_3 und

  $$\mu_{alg}(A_3, -1) = 2, \quad \mu_{alg}(A_3, 3) = 1.$$

- $$\begin{aligned}\chi_{A_4}(\lambda) &= \det(\lambda E_3 - A_4) = \det\begin{pmatrix}\lambda+2 & -1 & 0\\ 3 & \lambda-1 & -1\\ 1 & -1 & \lambda+1\end{pmatrix}\\ &\overset{S2+S1\to S1}{=} \det\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & 0\\ \lambda+2 & \lambda-1 & -1\\ 0 & -1 & \lambda+1\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{Sarrus}}{=} (\lambda+1)^2(\lambda-1) + (\lambda+1)(\lambda+2) - (\lambda+1)\\ &= (\lambda+1)\big[(\lambda+1)(\lambda-1) + (\lambda+2) - 1\big]\\ &= \lambda(\lambda+1)^2.\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: $\chi_{A_4}(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{-1, 0\}$
$\Rightarrow \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ sind die Eigenwerte von A_4 und

$$\mu_{alg}(A_4, -1) = 2, \quad \mu_{alg}(A_4, 0) = 1.$$

(b)
- χ_{A_1} zerfällt über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren und die Vielfachheit aller Nullstellen ist 1 $\overset{(15.22)(b)}{\Rightarrow}$ A_1 diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.
- χ_{A_2} zerfällt über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren $\overset{(15.22)(a)}{\Rightarrow}$ A_2 nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

(c)
- Hinweis $\Rightarrow$ $\mathrm{Eig}(A_3, 3) = \mathrm{Lin}(v_3)$ mit $v_3 = (-1, 0, 1)^t$.
  Es bleibt $\mathrm{Eig}(A_3, -1) = \mathrm{Kern}((-1)E_3 - A_3)$ zu berechnen:

$$(-1)E_3 - A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  (-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A_3, -1) = \mathrm{Kern}((-1)E_3 - A_3)$ ist (v_1, v_2) mit $v_1 = (1, 0, 1)^t$, $v_2 = (0, 1, 0)^t$.
  Damit ist

$$\mu_{geo}(A_3, 3) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_3, 3) = 1, \quad \mu_{geo}(A_3, -1) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_3, -1) = 2.$$

- Hinweis $\Rightarrow$ $\mathrm{Eig}(A_4, 0) = \mathrm{Lin}(v_3)$ mit $v_3 = (1, 2, 1)^t$.
  Es bleibt $\mathrm{Eig}(A_4, -1) = \mathrm{Kern}((-1)E_3 - A_4)$ zu berechnen:

$$(-1)E_3 - A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  (-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A_4, -1) = \mathrm{Kern}((-1)E_3 - A_4)$ ist $v_1 = (1, 1, 1)^t$.
  Damit ist

$$\mu_{geo}(A_4, 0) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_4, 0) = 1, \quad \mu_{geo}(A_4, -1) = \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Eig}(A_4, -1) = 1.$$

(d)
- Für A_3 gilt:

$$\mu_{geo}(A_3, 3) = 1 = \mu_{alg}(A_3, 3), \qquad \mu_{geo}(A_3, -1) = 2 = \mu_{alg}(A_3, -1),$$

  d.h. für alle Eigenwerte stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit überein.
  Außerdem zerfällt χ_{A_3} über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren (vgl. (a))
  $\overset{(15.24)}{\Rightarrow}$ A_3 ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.
- Für A_4 gilt:

$$\mu_{geo}(A_4, -1) = 1 \neq 2 = \mu_{alg}(A_4, -1).$$

  $\overset{(15.24)}{\Rightarrow}$ A_4 ist nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$.

(e) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig $\Rightarrow$ (v_1, v_2, v_3) ist Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A_3.
(15.3) $\Rightarrow$

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(f) Aus (a): $\chi_{A_2}(\lambda) \overset{(a)}{=} \lambda(\lambda^2+1)$.

p/q-Formel: Nullstellen von λ^2+1 sind $\lambda_{2/3} = \pm\sqrt{-1} \Rightarrow \lambda^2+1 = (\lambda-i)(\lambda+i)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt also $\chi_{A_2}(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\lambda \in \{0, i, -i\}$.

$\Rightarrow$ Eigenwerte von A_2 über $\mathbb{C}$ sind

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = -i.$$

χ_{A_2} zerfällt in Linearfaktoren über $\mathbb{C}$ und die Vielfachheit aller Nullstellen ist 1 $\overset{(15.22)(b)}{\Rightarrow}$ A_2 diagonalisierbar über $\mathbb{C}$.

Hinweis $\Rightarrow$

$$\mathrm{Eig}(A_2, 0) = \mathrm{Lin}(\underbrace{(1,1,0)^t}_{=:v_1}), \quad \mathrm{Eig}(A_2, i) = \mathrm{Lin}(\underbrace{(1+i, 2i, 2)^t}_{=:v_2}).$$

Es bleibt $\mathrm{Eig}(A_2, -i) = \mathrm{Kern}((-i)E_3 - A_2)$ zu berechnen:

$$(-i)E_3 - A_2 = \begin{pmatrix} -i+1 & -1 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 2 & -2 & -i-1 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{i+1}{2} \\ -i+1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

$$\overset{(i-1)\cdot Z1 + Z2 \to Z2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{i+1}{2} \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{i-1}{2} \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Eig}(A_2, -i) = \mathrm{Kern}((-i)E_3 - A_2)$ ist $v_3 = (1-i, -2i, 2)^t$.

(15.3) $\Rightarrow$

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 2i & -2i \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

erfüllen $T^{-1}A_2T = D$.

Aufgabe 2 (Anwendung: Diagonalisierbarkeit bei linearen Rekursionen, 3 = 0.5 + 2.5 Punkte).

Die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge reeller Zahlen, die rekursiv definiert ist durch

$$a_{n+1} := a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (*)$$

und $a_0 := 1$, $a_1 := 1$.

(a) Definieren Sie $b_n := a_{n-1}$ und finden Sie eine Matrix $A \in M(2\times 2, \mathbb{R})$, so dass $(*)$ äquivalent ist zu
$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Nutzen Sie P2 (a),(b), um eine nicht-rekursive Formel (ohne Matrizenmultiplikationen) von a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ zu ermitteln.
Hinweis: Falls Sie während ihrer Rechnung eine Matrix invertieren müssen, dürfen Sie das Inverse mit einem Computer-Algebra-System berechnen lassen. Versuchen Sie in Ihren Rechnungen so lange wie möglich, nur die Bezeichnungen λ_1, λ_2 der beiden Eigenwerte $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ zu nutzen und diese nicht auszuschreiben.

Lösung:

(a) (*) ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (**)$$

Mit $b_n := a_{n-1}$ folgt die Behauptung.

(b) Ziel zunächst: Diagonalisiere A.

Hier ist $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1.$

Es ist $\chi_A(\lambda) = 0$ genau dann, wenn $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Damit sind $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die Eigenwerte von A. Berechnung der Eigenräume:

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_1) = \mathrm{Kern}(\lambda_1 E_2 - A)$:

$$\lambda_1 E_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda_1 - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_1 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(\lambda_1 E_2 - A)$ ist damit $v_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\mathrm{Eig}(A, \lambda_2) = \mathrm{Kern}(\lambda_2 E_2 - A)$:

$$\lambda_2 E_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda_2 - 1 & -1 \\ -1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\to} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)-Trick $\Rightarrow$ Eine Basis von $\mathrm{Kern}(\lambda_2 E_2 - A)$ ist damit $v_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow A = SDS^{-1}$ mit $S^{-1} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Berechnung S: Es gilt $S = (S^{-1})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$.

P2(a),(b) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= S^{-1} D^{n-1} S \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & \lambda_2 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 + \lambda_2 \\ 1 - \lambda_1 \end{pmatrix}}}_{=\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (-1+\lambda_2)\lambda_1^{n-1} \\ (1-\lambda_1)\lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} (-1+\lambda_2)\lambda_1^n + (1-\lambda_1)\lambda_2^n \\ *** \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d.h. (mit $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$):

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\lambda_2^{n+1} - \lambda_1^{n+1} \Big) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \Big)^{n+1} - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \Big)^{n+1} \Big), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 (Beweise mit Eigenwerten und Diagonalisierbarkeit, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Es sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\varphi^3 = \varphi$, so kann φ nur die Eigenwerte $-1, 0, 1$ besitzen.

(b) Sei $v \in V, v \neq 0$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in K$. Ist $p \in K[t]$ ein Polynom über K, so ist v ein Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

(c) Ist V endlichdimensional und sind alle $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren von φ, so gibt es $\lambda \in K$, so dass $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Lösung:

(a) Sei λ ein Eigenwert von φ.
$\Longrightarrow$ Es gibt $v \in V \setminus \{0\}$ mit $\varphi(v) = \lambda v$. Dann gilt

$$\lambda v = \varphi(v) \overset{\varphi=\varphi^3}{=} \varphi^2(\varphi(v)) = \varphi^2(\lambda v) = \varphi(\varphi(\lambda v)) = \varphi(\lambda\varphi(v)) = \lambda\varphi(\lambda v) = \lambda^2(\varphi(v)) = \lambda^3 v.$$

$$\Longrightarrow (\lambda^3 - \lambda)v = 0 \overset{v\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda(\lambda^2 - 1) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \lambda \in \{-1, 0, 1\}.$$

(b) Für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi^k(v) = \varphi^{k-1}(\varphi(v)) = \lambda\varphi^{k-1}(v) = ... = \lambda^k v$.
Sei $p = \sum_{k=0}^n a_k t^k \in K[t]$. Dann gilt

$$(p(\varphi))(v) = \left(\sum_{k=0}^n a_k\varphi^k\right)(v) = \sum_{k=0}^n a_k\varphi^k(v) = \sum_{k=0}^n a_k\lambda^k v = \left(\sum_{k=0}^n a_k\lambda^k\right) \cdot v = p(\lambda)v.$$

$\Longrightarrow$ Also ist v Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

(c) Sei $n := \dim_K(V)$ und $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V.
Voraussetzung $\Rightarrow v_k$, $k = 1, ..., n$ ist Eigenvektor von $\varphi \Rightarrow$ Es gibt Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, so dass

$$\forall k \in \{1, ..., n\}: \quad \varphi(v_k) = \lambda_k v_k. \qquad (*)$$

(Damit gilt bereits: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. *Es muss nun noch gezeigt werden, dass* $\lambda_1 = ... = \lambda_n$, *damit* $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \lambda \cdot E_n$*).*

Sei $v := v_1 + ... + v_n \in V$.
Voraussetzung $\Rightarrow v$ ist Eigenvektor von $\varphi \Rightarrow$ Es gibt $\lambda \in K$ mit $\varphi(v) = \lambda v$.

Daher:

$$\lambda v_1 + ... + \lambda v_n = \lambda v = \varphi(v) \overset{\varphi\text{ linear}}{=} \varphi(v_1) + ... + \varphi(v_n) \overset{(*)}{=} \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$$

$\Longrightarrow (\lambda - \lambda_1)v_1 + ... + (\lambda - \lambda_n)v_n = 0.$
$\overset{(v_1,...,v_n)\text{ Basis}}{\Longrightarrow} \lambda - \lambda_k = 0,\ k = 1, .., n$
$\Longrightarrow \lambda = \lambda_1 = ... = \lambda_n$ (**).

- Möglichkeit 1 (elementar): Wir zeigen direkt $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$, indem wir für alle $w \in V$ zeigen: $\varphi(w) = \lambda w$.

  Sei $w \in V$ beliebig.
  $\overset{(v_1,...,v_n) \text{ Basis}}{\Rightarrow}$ Es gibt $\alpha_k \in K$, $k = 1, ..., n$ mit $w = \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k$
  $\Rightarrow \varphi(w) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi(v_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda v_k = \lambda \cdot \sum_{k=1}^n \alpha_k v_k = \lambda w$.
- Möglichkeit 2 (mit Darstellungsmatrix): Wegen (*),(**) gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\varphi) = \lambda \cdot E_n = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\lambda \cdot \mathrm{id}_V)$.
  $\overset{M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}:\mathrm{End}_K(V) \to M(n \times n, K) \text{ Isom.}}{\Rightarrow} \varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **02. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`