Lineare Algebra 2
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Sommersemester 2019

1. Abgabeblatt

Aufgabe 1	Aufgabe 2	Aufgabe 3	Summe:

Übungsgruppe: Tutor(in):

Namen:

Aufgabe 1 (Diagonalisierbarkeit von Matrizen, 9 = 3 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 Punkte).

Gegeben seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

aus $M(3 \times 3, K)$ über dem Körper $K = \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie für die Matrix A_k jeweils das charakteristische Polynom χ_{A_k}, und berechnen Sie die Eigenwerte λ von A_k in K und deren algebraische Vielfachheiten $\mu_{alg}(A, \lambda)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$.

(b) Entscheiden Sie für A_1, A_2 nur mit Hilfe der Ergebnisse aus (a), ob diese über K diagonalisierbar sind.

(c) Berechnen Sie die zu den Eigenwerten λ gehörigen Eigenräume $\mathrm{Eig}(A_k, \lambda)$ von A_k und geben Sie die geometrische Vielfachheiten $\mu_{geo}(A_k, \lambda)$ an $(k = 3, 4)$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $\mathrm{Eig}(A_3, 3) = \mathrm{Lin}((-1, 0, 1)^t)$ *und* $\mathrm{Eig}(A_4, 0) = \mathrm{Lin}((1, 2, 1)^t)$.

(d) Entscheiden Sie für A_3, A_4 nur mit Hilfe der Ergebnisse aus (a) und (c), ob diese über K diagonalisierbar sind.

(e) Geben Sie eine Basis von K^3 aus Eigenvektoren von A_3 an, sowie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$, so dass $T^{-1} A_3 T = D$.

Sei nun $K = \mathbb{C}$.

(f) Zeigen Sie, dass A_2 nun über K diagonalisierbar ist und geben Sie eine Matrix $T \in \mathrm{GL}(3, K)$ und eine Diagonalmatrix $D \in M(3 \times 3, K)$ an, so dass $T^{-1}A_2T = D$.
Hinweis: Sie dürfen ohne Rechnung benutzen, dass $\mathrm{Eig}(A_2, 0) = \mathrm{Lin}((1, 1, 0)^t)$ *und* $\mathrm{Eig}(A_2, i) = \mathrm{Lin}((1 + i, 2i, 2)^t)$.

Aufgabe 2 (Anwendung: Diagonalisierbarkeit bei linearen Rekursionen, 3 = 0.5 + 2.5 Punkte).

Die Fibonacci-Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Folge reeller Zahlen, die rekursiv definiert ist durch

$$a_{n+1} := a_n + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (*)$$

und $a_0 := 1$, $a_1 := 1$.

(a) Definieren Sie $b_n := a_{n-1}$ und finden Sie eine Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass $(*)$ äquivalent ist zu

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(b) Nutzen Sie P2 (a),(b), um eine nicht-rekursive Formel (ohne Matrizenmultiplikationen) von a_n, $n \in \mathbb{N}_0$ zu ermitteln.
Hinweis: Falls Sie während ihrer Rechnung eine Matrix invertieren müssen, dürfen Sie das Inverse mit einem Computer-Algebra-System berechnen lassen. Versuchen Sie in Ihren Rechnungen so lange wie möglich, nur die Bezeichnungen λ_1, λ_2 *der beiden Eigenwerte* $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *und* $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *zu nutzen und diese nicht auszuschreiben.*

Aufgabe 3 (Beweise mit Eigenwerten und Diagonalisierbarkeit, 4 = 1 + 1 + 2 Punkte).

Es sei V ein K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(a) Gilt $\varphi^3 = \varphi$, so kann φ nur die Eigenwerte $-1, 0, 1$ besitzen.

(b) Sei $v \in V, v \neq 0$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in K$. Ist $p \in K[t]$ ein Polynom über K, so ist v ein Eigenvektor von $p(\varphi)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$.

(c) Ist V endlichdimensional und sind alle $v \in V \setminus \{0\}$ Eigenvektoren von φ, so gibt es $\lambda \in K$, so dass $\varphi = \lambda \cdot \mathrm{id}_V$.

Abgabe:
In Zweiergruppen, bis spätestens Donnerstag, den **02. Mai 2019, 09:15 Uhr**.
(Die Zettelkästen für das Abgabeblatt sind im 1. OG, INF 205, vor dem Dekanat.)

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la2-ss2019/index.html`