(21.12) Bemerkung (Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$)

Generell gibt es in einem n-dimensionalen Raum n Arten von Spiegelungen, nämlich an $0, 1, \ldots, (n-1)$-dimensionalen Teilräumen (im $\mathbb{R}^2$ am Nullpunkt und an Geraden).

Wir wollen jetzt vereinfacht unter einer Spiegelung $S \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ die Spiegelung an einem $(n-1)$-dimensionalen Unterraum W verstehen. Es gilt dann nach 20.18

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{W}_{\dim(W)=n-1} \oplus \underbrace{W^\perp}_{\dim W^\perp = 1} = W \oplus \operatorname{Lin}((s)) \quad \text{mit einem } s \perp W$$

Es soll nun gelten $S(s) = -s$ und $S(w) = w \ \forall w \in W$,

d.h. für $x \in \mathbb{R}$ mit $x = \lambda s + \mu w$ gilt $S(x) := \lambda(-s) + \mu w$.

Damit ist S wohldefiniert. Die geschlossene Form erhält man aus der Projektionsformel in 20.5(a)

$$\lambda s = s\,(s^t s)^{-1} s^t x \;, \text{ d.h. } \lambda = \frac{\langle s, x\rangle}{\langle s, s\rangle} \quad \text{sowie}$$

$$x = \lambda s + \underbrace{(x - \lambda s)}_{\perp s, \text{ d.h. } \in W}$$

und damit

$$S(x) = -\lambda s + (x - \lambda s) = x - 2\lambda s = x - 2\frac{\langle s, x\rangle}{\langle s, s\rangle} s$$

Nach 20.16/20.18 kann man $s_1 = s/\|s\|$ zu einer ONB $B = (s_1, \ldots, s_n)$ mit $s_i \in W$ für $i = 2, \ldots, n$ ergänzen. Es gilt dann

$$M_B^B(S) = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

und damit $\det(S) = \det(M_B^B(S)) = -1$. Ferner gilt für

$x = \lambda_1 s + \mu_1 w$ und $y = \lambda_2 s + \mu_2 w$

$$\langle S(x), S(y) \rangle = \langle -\lambda_1 s + \mu_1 w_1, -\lambda_2 s + \mu_2 w_2 \rangle$$

$$\underset{s \perp w_i}{=} \lambda_1 \lambda_2 \langle s, s \rangle + \mu_1 \mu_2 \langle w_1, w_2 \rangle = \langle x, y \rangle$$

d.h. S ist eine Isometrie (das folgt auch, da $M_B^B(S)$ orthogonal ist). Es gilt damit $M_{(e_1,\dots,e_n)}^{(e_1,\dots,e_n)}(S) \in SO(n)$.

Wegen $W \overset{20.18}{=} \{s\}^\perp$ ist S durch den Vektor s eindeutig bestimmt. Man nennt S auch die <u>Spiegelung längs s.</u>
Außerdem definiert jedes $s \in \mathbb{R}^n$ eine solche Spiegelung.

(21.13) Satz

Jede Isometrie im $\mathbb{R}^n$ ist das Produkt von höchstens n Spiegelungen.

<u>Beweis:</u> Induktion über n

<u>IA:</u> $n=1$: In $\mathbb{R}^1$ sei $\varphi(x) = ax$ eine Isometrie. Aus

$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = a^2 xy = a^2 \langle x, y \rangle$ folgt $a = \pm 1$

Für $a = -1$ ist das die Spiegelung längs e_1.

<u>IS:</u> Sei die Aussage für $(n-1)$ richtig und seien $s_1, \dots, s_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}$ die obigen zu den $(n-1)$ Spiegelungen gehörenden Vektoren sowie $\bar{s}_i = \begin{pmatrix} s_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ die mit 0 verlängerten Vektoren sowie $\bar{S}_i$ die zugehörigen Spiegelungen im $\mathbb{R}^n$. Sei ferner $(e_1, \dots, e_{n-1})$ und $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$ die Einheitsbasis im $\mathbb{R}^{n-1}$ bzw. $\mathbb{R}^n$. Es gilt $\bar{S}_i(\bar{e}_n) = \bar{e}_n \; \forall i$.

Sei nun $\bar{\varphi}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie im $\mathbb{R}^n$. Wir definieren

$$\varphi: \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad \varphi(e_j) = \bar{\varphi}(\bar{e}_j) \quad j = 1, \dots, n-1$$

Wegen

$\langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle = \langle \bar{\varphi}(\bar{e}_i), \bar{\varphi}(\bar{e}_j) \rangle = \langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$

ist φ eine Isometrie im $\mathbb{R}^{n-1}$ (es reicht, die Eigenschaft für Basisvektoren nachzurechnen!)

<u>Fall 1:</u> $\bar{\varphi}(\bar{e}_n) = \bar{e}_n$. Laut IV gibt es $k \le n-1$ und $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $\varphi = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$

$$\Rightarrow \quad \bar{\varphi} = \bar{s}_{i_1} \circ \ldots \circ \bar{s}_{i_k} \quad ✓$$

<u>Fall 2:</u> $\bar{\varphi}(\bar{e}_n) \neq \bar{e}_n$. Setze $s = \bar{e}_n - \bar{\varphi}(\bar{e}_n)$ und

$$\mathfrak{s}(x) = x - 2\frac{\langle s, x\rangle}{\langle s, s\rangle} s$$

Es gilt

$$\langle s, s\rangle = \langle \bar{e}_n, \bar{e}_n\rangle - 2\langle \bar{e}_n, \bar{\varphi}(\bar{e}_n)\rangle + \underbrace{\langle \bar{\varphi}(\bar{e}_n), \bar{\varphi}(\bar{e}_n)\rangle}_{= \langle \bar{e}_n, \bar{e}_n\rangle}$$

$$= 2\langle \bar{e}_n, \bar{e}_n - \bar{\varphi}(\bar{e}_n)\rangle = 2\langle \bar{e}_n, s\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{s}(\bar{e}_n) = \bar{e}_n - 2\frac{\langle s, \bar{e}_n\rangle}{2\langle \bar{e}_n, s\rangle} s = \bar{e}_n - s = \bar{\varphi}(\bar{e}_n)$$

$$\Rightarrow \quad (\mathfrak{s}\bar{\varphi})(\bar{e}_n) = \bar{e}_n$$

$\mathfrak{s}\bar{\varphi}$ ist auch wieder eine Isometrie und nach Fall 1 gilt

$$\mathfrak{s}\bar{\varphi} = \bar{s}_{i_1} \circ \ldots \circ \bar{s}_{i_k} \quad \text{mit } k \leq n-1 \text{ und } i_1, \ldots, i_{k-1} \in \{1, \ldots, n-1\}$$

d.h.

$$\bar{\varphi} = \mathfrak{s} \circ \bar{s}_{i_1} \circ \ldots \circ \bar{s}_{i_k} \quad ✓ .$$