Ringe und Ideale

, R, S Kommutative Ringe mit 1.

M, N Menge, $a \in M$:
$M+N := \{m+n \mid m \in M, n \in N\}$
$aN := \{a \cdot n \mid n \in N\}$

M Menge

~ Relation auf M

$\sim \subseteq M \times M$

Notation für Elemente:
$a \sim b :\Leftrightarrow (a,b) \in \sim$

~ Äquivalenzrelation auf M

(i) ~ reflexiv: $\forall a \in M: a \sim a$
(ii) ~ symm: $\forall a,b \in M: a \sim b \Rightarrow b \sim a$
(iii) ~ transitiv: $\forall a,b,c \in M: a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

Äquivalenzklasse $\bar{a}$ von $a \in M$ bzgl. ~

$\bar{a} := \{b \in M : b \sim a\}$, a heißt Repräsentant von $\bar{a}$

Menge $M/_\sim$ der Äquivalenzklassen von ~, Faktormenge/Quotientenmenge

$M/_\sim := \{\bar{a} \mid a \in M\}$

Satz: Zwei Äquivalenzklassen sind gleich oder disjunkt, und jedes $a \in M$ liegt in genau einer Äquivalenzklasse: $M = \dot{\bigcup}_{\bar{a} \in M/_\sim} \bar{a}$

Def. $\sim \subseteq R \times R$ durch $r_1 \sim r_2 :\Leftrightarrow r_1 - r_2 \in I$

I Ideal in R

$I \subseteq R$ mit
(I1) $0 \in I$
(I2) $a, b \in I \Rightarrow a+b \in I$
(I3) $a \in I, r \in R \Rightarrow r \cdot a \in I$

$(0) = \{0\}$, $(a) = aR$ für $a \in R$, $(1) = R$ sind Ideale

Von $a_1, \dots, a_n \in R$ erzeugtes Ideal $(a_1, \dots, a_n)$

$(a_1, \dots, a_n) := a_1R + \dots + a_nR = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \mid r_1, \dots, r_n \in R \right\}$

$I \subseteq R$ Hauptideal

Es gibt $a \in R$ mit $I = (a)$

Satz: $I_1, I_2 \subseteq R$ Ideale $\Rightarrow I_1 + I_2, I_1 \cap I_2$ Ideale

Satz: $\varphi: R \to S$ Ringhom. Dann:
- $J \subseteq S$ Ideal $\Rightarrow \varphi^{-1}(J)$ Ideal
- $\mathrm{kern}(\varphi)$ Ideal
- $I \subseteq R$ Ideal, φ surjektiv $\Rightarrow \varphi(I)$ Ideal

$R/_I$ Restklassenring / Faktorring von R nach I

$R/_I := R/_\sim$ ist Menge der Äquivalenzklassen von $r_1 \sim r_2 :\Leftrightarrow r_1 - r_2 \in I$

$\bar{r} := r + I$ Restklasse modulo I

Addition / Mult. auf $R/_I$:
$+, \cdot : R/_I \times R/_I \to R/_I$,
$\bar{r} + \bar{s} := \overline{r+s}$
$\bar{r} \cdot \bar{s} := \overline{r \cdot s}$

Nullelement $\bar{0}$, Einselement $\bar{1}$

Satz: $R/_I$ komm. Ring mit 1

Kanonische Surjektion π

$\pi: R \to R/_I$, $r \mapsto \bar{r}$

Satz: π ist surj. Ringhom. mit $\mathrm{Kern}(\pi) = I$

$\varphi: R \to S$ Ringhomomorphismus

$\forall a, b \in R$:
(RH1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$
(RH2) $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$
(RH3) $\varphi(1_R) = 1_S$

$\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$

Satz: φ injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$

$\varphi: R \to S$ Ringisomorphism.

φ Ringhomomorph. und φ bijektiv

Satz: φ Ringisom. $\Rightarrow \varphi^{-1}$ Ringisom.

$R \cong S$ isomorph

Es gibt Ringisom. $\varphi: R \to S$

Satz: $R \cong S \Rightarrow$ Eigenschaften wie Nullteilerfrei, HIR, Körper übertragen sich von R auf S

Homomorphiesatz für Ringe

$\varphi: R \to S$ Ringhom. $\Rightarrow$
$\Phi: R/_{\mathrm{Kern}(\varphi)} \to \mathrm{Bild}(\varphi)$,
$\bar{r} \mapsto \varphi(r)$
ist wohldefinierter Ringisomorph.

$R = \mathbb{Z}, I = (n)$

Restklassenring $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ modulo $n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} := \mathbb{Z}/_{(n)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$ ist Menge der Äquivalenzklassen von $a \sim_n b :\Leftrightarrow a - b \in (n)$
$\Leftrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} : a - b = qn$
$\Leftrightarrow: a \equiv b \pmod{n}$

$\bar{a} = a + n\mathbb{Z}$

Satz: $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \cong \mathbb{F}_n$