Unitäre Vektorräume und Spektralsatz

V $\mathbb{C}$-VR
$\mathcal{B}$ Basis $= (v_1, \dots, v_n)$

Unitärer Vektorraum $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$
V ist $\mathbb{C}$-Vektorraum, und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist Skalarprodukt

Def. von orthogonal, ONB, Norm $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$, Gram-Schmidt $\tilde{w}_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, w_i \rangle$ wie im Eukl. VR.

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesche Sesqui-LF und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. definit (d.h. $\forall x \in V \setminus \{0\}: \langle x, x \rangle > 0$)

Satz: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch $\Rightarrow \forall x \in V: \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Sesquilinearform
(i) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist linear im 1. Argument, d.h. $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$: $\langle \lambda v + w, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$
(ii) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist semilinear im 2. Argument, d.h. $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{C}$: $\langle u, \lambda v + w \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ hermitesch
$\forall x, y \in V$: $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Darstellungsmatrix $M^*_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$
$M^*_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle) := (\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n}$

Von A induzierte SesquiLF $\gamma_A^{\mathcal{B}}$
$\gamma_A^{\mathcal{B}}(v, w) := \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)^t \cdot A \cdot \overline{\Phi_{\mathcal{B}}(w)}$

$M^*_{\mathcal{B}}$

$\gamma_A^{\mathcal{B}}$

$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$

Satz: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. def. $\Longleftrightarrow M^*_{\mathcal{B}}(\langle \cdot, \cdot \rangle)$ pos. def.

$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ hermitesch
$\overline{A}^t = A$

Ist λ EW von A $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ pos. def.
A hermitesch und $\forall x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}: x^t A \overline{x} > 0$

Satz (Hauptminoren)
A hermitesch. Dann: $\forall k \in \{1, \dots, n\}: \det(A^{(k)}) > 0 \Longleftrightarrow A$ pos. def.

Satz (Eigenwerte)
A hermitesch. Dann: Alle EW von A positiv $\Longleftrightarrow A$ pos. def

$(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W), (V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ unitäre VR (endlichdim.) $\dim_{\mathbb{C}}(W) = \dim_{\mathbb{C}}(V) = n$
$f: V \to W$ $\mathbb{C}$-linear
$\mathcal{C}$ ONB von W, $\mathcal{B}$ ONB von V

Zu f adjungierte Abb. $f^{ad}: W \to V$
wie in Eukl. VR

Satz: $\mathcal{B}$ ONB $\Longrightarrow M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{ad}) = \overline{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)}^t$

$f: V \to V$ selbstadjungiert
$f = f^{ad}$

$f: V \to V$ normal
$f \circ f^{ad} = f^{ad} \circ f$

f unitär
$\forall v_1, v_2 \in V$: $\langle f(v_1), f(v_2) \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$

Satz: $\mathcal{B}$ ONB $\Rightarrow$ f normal $\Longleftrightarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ normal

Satz: $\mathcal{B}$ ONB $\Rightarrow$ f selbstadj. $\Longleftrightarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ hermitesch

Satz: $\mathcal{B}$ ONB $\Rightarrow$ f unitär $\Longleftrightarrow$ $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)$ unitär

Spektralsatz für normale Abb.
f normal $\Longleftrightarrow$ Es gibt ONB $\mathcal{B}$ von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$ aus Eigenvektoren von f

$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ normal
$\overline{A}^t A = A \overline{A}^t$

$A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ unitär
$\overline{A}^t A = E_n$

Ist λ EW von A $\Rightarrow |\lambda| = 1$