Dualraum und adjungierte Abbildungen

V, W Vektorräume über Körper K, $\mathcal{A}, \mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ Basen von V, $\mathcal{C}$ Basis von W

$f: V \to W$ linear

$U \subseteq V$, $X \subseteq W$ UVR.

Bidualraum V^{**}

$V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K)$

$i: V \to V^{**}$, $v \mapsto i_v$

$i_v(\varphi) := \varphi(v)$

Satz: $\dim_K(V) < \infty$ $\Rightarrow$ i Isomorphismus, $V \cong V^{**}$ (Kanonisch)

Berechnung:
Wähle leichte „Referenzbasis" $\mathcal{A}$, (Bsp. $V = K^n$: $\mathcal{A} = (e_1, \dots, e_n)$)
$\Rightarrow T^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{A}^*} = (T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}})^t = ((T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}})^{-1})^t$

Duale Basis $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$

$v_i^* = v_i^*(\mathcal{B}): V \to K$

$v_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Kronecker-Delta

Darstellungsformel:
$v \in V \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) \cdot v_i$
$\varphi \in V^* \Rightarrow \varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(v_i) \cdot v_i^*$

Satz: $\dim_K(V) < \infty \Rightarrow \mathcal{B}^*$ Basis von V^*

Dualraum V^*

$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) = \{\varphi: V \to K \mid \varphi \text{ } K\text{-linear}\}$

„Linearform"

Satz:
$^*: \mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$
$f \mapsto f^*$
ist ein Isomorphismus

Duale Abbildung $f^*: W^* \to V^*$

$f^*(\psi) = \psi \circ f$

„überträgt Mess-Abb. ψ von W auf V (zieht sie zurück nach V)"

Satz: $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$

Satz: f Isom. $\Rightarrow$ f^* Isom., $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$

Berechnung:
- Ergänze Basis $(u_1, \dots, u_r)$ von U zu Basis $(u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_s)$ von V
- Ermittle duale Basis $(u_1^*, \dots, u_r^*, v_1^*, \dots, v_s^*)$
- $(v_1^*, \dots, v_s^*)$ ist Basis von U°

Satz: $\dim_K(U^\circ) = \dim_K(V) - \dim_K(U)$

Satz: $(U + W)^\circ = U^\circ \cap W^\circ$
$\dim_K(V) < \infty \Rightarrow (U \cap W)^\circ = U^\circ + W^\circ$

Dualität: $\dim_K(V) < \infty \Rightarrow$
$\tilde{U} := \{v \in V : \forall \varphi \in U^\circ : \varphi(v) = 0\} \overset{!}{=} U$

Annullator U° von U

$U^\circ = \{\varphi \in V^* \mid \forall u \in U : \varphi(u) = 0\}$

„sammle Mess.-Abb. (Vektoren), die U auf 0 abbilden (bzw. senkrecht auf U stehen)"

$\Psi_{\mathcal{B}}: V \to V^*$, $v_i \mapsto v_i^*$

$\Psi = \Psi_{\mathcal{B}}$

Satz: $\dim_K(V) < \infty \Rightarrow$
$\Psi_{\mathcal{B}}$ Isom. (basisabh.)
$V \cong V^*$, $\dim_K(V) = \dim_K(V^*)$

K, K, f^*, V^*, U°, φ, ψ, $f(U)^\circ$, W^*, Ψ, $\cong$, $\cong$, Φ, V, U, f, $f(U)$, W, f^{ad}

Verbindungen:
$M^{\mathcal{C}^*}_{\mathcal{B}^*}(f^*) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)^t$
$\mathrm{Rang}(f^*) = \mathrm{Rang}(f)$

Pullback-Formeln:
$\mathrm{Kern}(f^*) = \mathrm{Bild}(f)^\circ$, $(f^*)^{-1}(U^\circ) = f(U)^\circ$

Pushforward-Formeln: $\dim_K(V) < \infty \Rightarrow$
$\mathrm{Bild}(f^*) = \mathrm{Kern}(f)^\circ$, $f^*(X^\circ) = (f^{-1}(X))^\circ$

Verbindungen:
$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(f^{ad}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f)^t$
(falls $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ONB)

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$, $(W, \langle \cdot, \cdot \rangle_W)$ Euklidische Räume
$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ONB von V bzw. W

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ nicht ausgeartet und symmetrisch

Induzierte Dualraum-Abb. Γ_ℓ, Γ_r

$\Gamma_\ell: V \to V^*$, $w \mapsto \langle \cdot, w \rangle$

$\Gamma_r = \Gamma_r^{\langle \cdot, \cdot \rangle}: V \to V^*$, $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$

$\Gamma_\ell = \Gamma_r$ injektiv $\xrightarrow{\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty}$ Γ_r Isomorphismus (Kanonisch)

Berechnung: $\Gamma_r(U^\perp) = U^\circ$

Satz: $\mathcal{B}$ ONB $\Rightarrow \Psi_{\mathcal{B}} = \Gamma_r$

$\Psi = \Gamma_r$

Verbindung zu f^*
$f^{ad} = \Psi^{-1} \circ f^* \circ \Phi$,
falls $\Psi = \Gamma_r^{\langle \cdot, \cdot \rangle_V}$, $\Phi = \Gamma_r^{\langle \cdot, \cdot \rangle_W}$

Zu f adjungierte Abb. $f^{ad}: W \to V$

$f^{ad}: W \to V$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $W \to V$ mit
$\forall v \in V, w \in W: \langle f(v), w \rangle_W = \langle v, f^{ad}(w) \rangle_V$

Satz: $\dim_K(V) < \infty \Rightarrow f^{ad}$ exist.

Satz:
- $(f^{ad})^{ad} = f$
- f orthogonal $\Rightarrow f^{ad} = f^{-1}$

$\gamma'(x, y) := \langle f(x), y \rangle$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ symm.

$\gamma': V \times V \to \mathbb{R}$ symm. Bilinearform

Finde zu f selbstadj. symm. Bilinearform γ' (oder umgekehrt) mit $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = M^*_{\mathcal{B}}(\gamma')$

$f := (\Gamma_r^{\langle \cdot, \cdot \rangle})^{-1} \circ \Gamma_r^{\gamma'}$

$f: V \to V$ selbstadjungiert

$f = f^{ad}$

Spezialfall
$V = \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = x^t y$, $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch:
$f = \hat{A}$
$\longleftrightarrow$
$\gamma'(x, y) = x^t A y$

Allgemeine Hauptachsentrafo
γ' symm. Bil. $\Rightarrow$
Es gibt ONB $\mathcal{B}$ von $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ mit $M^*_{\mathcal{B}}(\gamma') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, wobei λ_i EW von zugehörigem selbstadj. f

Spektralsatz
f selbstadj. $\Rightarrow$
Es gibt ONB aus Eigenvekt. von f; alle EW $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sind reell (d.h. f diagonalisierbar)
$V = \mathrm{Eig}(f, \lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(f, \lambda_r)$

Satz: $f(U) \subseteq U$ $\Rightarrow f(U^\perp) \subseteq U^\perp$

Satz: $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f)$

Pullback-Formeln:
$\mathrm{Kern}(f^{ad}) = \mathrm{Bild}(f)^\perp$, $(f^{ad})^{-1}(U^\perp) = f(U)^\perp$

Pushforward-Formeln: $\dim_{\mathbb{R}}(V) < \infty \Rightarrow$
$\mathrm{Bild}(f^{ad}) = \mathrm{Kern}(f)^\perp$, $f^{ad}(X^\perp) = (f^{-1}(X))^\perp$

und: $V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f^{ad}) = \mathrm{Kern}(f^{ad}) \oplus \mathrm{Bild}(f)$

$\oplus$ = $\oplus$ und orthogonal