Bilinearformen

V VR über Körper K, $\mathcal{B}=(v_1,\dots,v_n)$, $\mathcal{C}$ Basen von V, $\dim(V)=n$

$\gamma: V\times V\to K$ Bilinearform

$\forall v,w\in V$:

i) $\gamma(\cdot,w): V\to K$ ist linear

ii) $\gamma(v,\cdot): V\to K$ ist linear

γ symmetrische Bilinearform

γ Bilinearform und $\forall v,w\in V$: $\gamma(v,w)=\gamma(w,v)$

Soll nachgewiesen werden, dass γ symm. Bilinearform, so genügt es, $\forall v,w\in V$

i) $\gamma(\cdot,w): V\to K$ linear

s) $\gamma(v,w)=\gamma(w,v)$

zu zeigen.

$\mathrm{Rang}(\gamma)$

$=\mathrm{Rang}\ M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$

Darstellungssatz

$\forall v,w\in V$:

$\gamma(v,w)=(\Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v))^t M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)\,\Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(w)$

Basiswechselformel

$M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)=(T^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}})^t M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)\,T^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$

Darstellungsmatrix von γ bzgl. $\mathcal{B}$

$M^*_{\mathcal{B}}(\gamma):=(\gamma(v_i,v_j))_{1\le i,j\le n}\in M(n\times n,K)$

$A=M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$

$\mathrm{Bil}_K(V)$

$=\{\gamma: V\times V\to K \mid \gamma \text{ Bilinearform}\}$

$\cong$ **$M(n\times n,K)$**

Jede (symm.) Bilinearform kann mit (symm.) Matrix identifiziert werden

$\gamma=\gamma^{\mathcal{B}}_A$

Von Matrix $A\in M(n\times n,K)$ induzierte Bilinearform $\gamma^{\mathcal{B}}_A$ bzgl. Basis $\mathcal{B}$

$\gamma^{\mathcal{B}}_A(v,w):=(\Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(v))^t A\,\Phi^{-1}_{\mathcal{B}}(w)$

Spezialfall $V=K^n$, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$

$\gamma_A:=\gamma^{\mathcal{B}}_A$

$\gamma_A(v,w)=v^tAw$

$v,w\in V$

(V,γ) quadratischer Raum

γ symmetrische Bilinearform

$(v_i)_{i\in I}$ orthogonal bzgl. γ

$\forall i,j\in I,\ i\neq j:\ \gamma(v_i,v_j)=0$

v,w orthogonal bzgl. γ

$\gamma(v,w)=0$

$\mathcal{C}$ Orthogonalbasis (OB) von (V,γ)

$\mathcal{C}$ Basis von V und orthogonal bzgl. γ

Satz: Es gibt immer eine OB.

$M^*_{\mathcal{C}}(\gamma)$ diagonal

$\mathcal{B}$ beliebige Basis

$A=M^*_{\mathcal{B}}(\gamma)$

Wähle $\mathcal{C}=(\Phi_{\mathcal{B}}(v_1),\dots,\Phi_{\mathcal{B}}(v_n))$, wobei $(v_1,\dots,v_n)=T$ Spalten von T

$(\Rightarrow T^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}=T)$

Satz: $A\in M(n\times n,K)$ symmetrisch, $r=\mathrm{Rang}(A)$

$\Rightarrow$ Es gibt $T\in GL(n,K)$, $\lambda_1,\dots,\lambda_r\in K\setminus\{0\}$ mit

$T^tAT=\left(\begin{array}{c|c}\begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_r\end{matrix} & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$ und Spalten von T sind OB von (K^n,γ_A)

Spezialfall $K=\mathbb{R}$

Sylvester'scher Trägheitssatz: $A\in M(n\times n,K)$ symm.

$\Rightarrow$ Es gibt $T\in GL(n,K)$ und $p,q\in\{0,\dots,n\}$, $p+q=\mathrm{Rang}(A)$ mit $T^tAT=\begin{pmatrix}E_p & 0 & 0\\ 0 & -E_q & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ und Spalten von T sind OB von (K^n,γ_A).

p,q sind eindeutig bestimmt.

$\mathrm{Signatur}(A):=(p,q)$

Satz: $S\in GL(n,K)\Rightarrow \mathrm{Signatur}(S^tAS)=\mathrm{Signatur}(A)$