Trigonalisierung / Nilpotenz

V VR über Körper K
$\mathcal{B}$ Basis von V
$\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$

φ trigonalisierbar

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ trigonalisierbar

$A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

$A \in M(n\times n, K)$ trigonalisierbar

Es gibt $S \in GL(n,K)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$(v_1, \dots, v_n) := S^{-1}$

$\mathcal{B}' := (\Phi_{\mathcal{B}}(v_1), \dots, \Phi_{\mathcal{B}}(v_n))$

Es gibt Basis $\mathcal{B}'$ von V, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

χ_φ zerfällt in Linearfaktoren, d.h. $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit

$$\chi_\varphi = (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n)$$

(λ_i nicht notwendig verschieden!)

A

S^{-1}

Algorithmus zur Bestimmung von S^{-1} aus A

1) Berechne $\chi_A = (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n)$
2) $A_1' := A_1 := A$, $\mathcal{E}_1^- := \mathcal{E} := (e_1, \dots, e_n)$ Standardbasis von K^n (optional: $S_0 := E_n$)
3) Wiederhole für $k = 1, \dots, n-1$:
   (Abbruch früher möglich falls bereits bei Zwischenschritt Dreiecksgestalt von A_k' vorliegt)
   - Berechne $w_k \in \mathrm{Eig}(A_k', \lambda_k)$, $\quad v_k := \Phi_{\mathcal{E}_k^-}(w_k)$
   - Wähle $j_k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_{k-1}\}$ so, dass $\mathcal{E}_{k+1} := (v_1, \dots, v_k, e_1, \dots, e_n) \setminus (e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$ Basis von K^n, setze $\mathcal{E}_{k+1}^- := (e_1, \dots, e_n) \setminus (e_{j_1}, \dots, e_{j_k})$
   - Berechne
   $$A_{k+1} := T^{\mathcal{E}_k}_{\mathcal{E}_{k+1}} \cdot A_k \cdot T^{\mathcal{E}_{k+1}}_{\mathcal{E}_k} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_k \end{matrix} & * \\ \hline 0 & A_{k+1}' \end{array}\right)$$
   (alternativ: $S_k^{-1} := T^{\mathcal{E}_{k+1}}_{\mathcal{E}}$ bzw. $S_k^{-1} := S_{k-1}^{-1} \cdot T^{\mathcal{E}_{k+1}}_{\mathcal{E}_k}$ und $A_{k+1} := S_k \cdot A \cdot S_k^{-1}$)
4) $S^{-1} := (v_1, \dots, v_n) \qquad (= S_{n-1})$

„Beschleunigung" (optional)

Sind $v_1, \dots, v_r$ alle EV von A zu $\lambda_1, \dots, \lambda_r$, so wähle $j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$ geeignet, so dass $\mathcal{E}_{r+1} := (v_1, \dots, v_r, e_1, \dots, e_n) \setminus (e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$ Basis von K^n. Setze

$$A_{r+1} := T^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_{r+1}} \cdot A \cdot T^{\mathcal{E}_{r+1}}_{\mathcal{E}} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_r \end{matrix} & * \\ \hline 0 & A_{r+1}' \end{array}\right)$$

$\mathcal{E}_{r+1}^- := (e_1, \dots, e_n) \setminus (e_{j_1}, \dots, e_{j_r})$

Starte Algorithmus mit $k = r+1$

$n = \dim(V)$

φ (bzw. A) nilpotent

$\exists k \in \mathbb{N}: \varphi^k = 0 \quad (A^k = 0)$

$\Updownarrow$

$\varphi^n = 0$ bzw. $A^n = 0$

$\Leftrightarrow$

$\chi_\varphi = t^n$ bzw. $\chi_A = t^n$

$\Leftrightarrow$

Es gibt Basis $\mathcal{B}'$ von V mit $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

bzw.

Es gibt $S \in GL(n,K)$ mit $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$