Normalformen

$A \in M(n\times n, K)$, K Körper

Ziel: Finde möglichst einfaches $B \in M(n\times n, K)$ mit $A \approx B$!

R Euklidischer Ring
$M \in M(n\times n, R)$

Start: $M = P_A$, $R = K[t]$

Algorithmus: Gauß-Diagonalisierung

Mit elementaren Zeilen/Spaltenumformungen kann erreicht werden:

$$M \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{c}_1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \bar{c}_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right),$$

wobei $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_r \in R\setminus\{0\}$, $\bar{c}_1 \mid \bar{c}_2 \mid \dots \mid \bar{c}_r$.

Vorgehen: Erreiche $M \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & 0 \\ \hline 0 & m_{11}\cdot M' \end{array}\right)$ durch: (dann dasselbe mit M')

- Vertausche Zeilen/Spalten, so dass (*) $m_{11} \neq 0$, und $\forall i,j$: $m_{ij} = 0$ oder $\delta(m_{11}) \le \delta(m_{ij})$
- Ist (*) erfüllt und $\exists j \in \{2,\dots,n\}$: $m_{1j} \neq 0$, so suche $q, r \in R$ mit $m_{1j} = q\cdot m_{11} + r$ und $\delta(r) < \delta(m_{11})$.
  Dann: $M = \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & m_{1j} \\ \hline & \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-q)} \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & r \\ \hline & \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} r & m_{11} \\ \hline & \end{array}\right)$
- Ist (*) erfüllt, $M = \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$, aber $\exists i,j \in \{2,\dots,n\}$: $m_{ij} \nmid m_{11}$, suche $q, r \in R$ mit $m_{ij} = q m_{11} + r$, $\delta(r) < \delta(m_{11})$.
  Dann: $M = \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & 0 \\ \hline 0 & m_{ij} \end{array}\right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & 0 \; m_{11} \; 0 \\ \hline 0 & m_{ij} \end{array}\right) \xrightarrow{\cdot(-q)} \left(\begin{array}{c|c} m_{11} & 0 \; m_{11} \; 0 \\ \hline 0 & \\ * & r \\ 0 & \end{array}\right)$

Berechnung

Elementarteilersatz/Elementarteiler $\bar{c}_i = \bar{c}_i(M)$ von M

$\exists r \in \mathbb{N}$, $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_r \in R\setminus\{0\}$ mit $\bar{c}_1 \mid \bar{c}_2 \mid \dots \mid \bar{c}_r$ und $M \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \bar{c}_1 & & 0 & 0 \\ 0 & & \bar{c}_r & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right)$. Bis auf Assoziiertheit sind $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_r$ eindeutig best. und heißen Elementarteiler von M.

Setze $\bar{c}_i = 0$ für $i = r+1, \dots, n$.

Satz: $\bar{d}_i \triangleq \bar{c}_1 \cdot \ldots \cdot \bar{c}_i$ $(i = 1, \dots, n)$

Determinantenteiler $\bar{d}_i = \bar{d}_i(M)$ von M

$\bar{d}_i = \operatorname{ggT}\big(\det(B) : B$ ist $i\times i$-Untermatrix von $M\big)$

d.h. B entsteht durch Streichen von $n-i$ Zeilen und $n-i$ Spalten von M

Setze $c_i(A) \triangleq \bar{c}_i(P_A)$ sodass $c_i(A)$ normiert

Setze $d_i(A) \triangleq \bar{d}_i(P_A)$ so dass $d_i(A)$ normiert

$P_A \sim P_B$ in $M(n\times n, K[t])$

d.h. $\exists S, T \in GL(n\times n, K[t])$ mit $P_A = S^{-1} P_B T$

Charakteristische Matrix P_A

$P_A = t\cdot E_n - A \in M(n\times n, K[t])$

Satz von Frobenius

$A \approx B$ in $M(n\times n, K)$

d.h. $\exists S \in GL(n, K)$ mit $A = S^{-1} B S$

Invariantenteilersatz

Invariantenteiler von A

Die eindeutig best. normierten $c_1(A), \dots, c_n(A) \in K[t]$ mit $P_A \sim \begin{pmatrix} c_1(A) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_n(A) \end{pmatrix}$ und $c_1(A) \mid c_2(A) \mid \dots \mid c_n(A)$

$c_i(A) = c_i(B)$ für $i = 1, \dots, n$

Falls $d_i(A)$ leichter zu berechnen, kann durch Satz daraus $c_i(A)$ ermittelt werden

Satz:
- $\forall i = 1, \dots, n$: $d_i(A) = c_1(A) \cdot \ldots \cdot c_i(A)$
- $c_n(A) = \mu_A$, $d_n(A) = \chi_A$

Determinantenteiler von A

Die eindeutig best. normierten $d_1(A), \dots, d_n(A) \in K[t]$ mit $d_i(A) \triangleq \bar{d}_i(P_A)$, $i = 1, \dots, n$

$d_i(A) = d_i(B)$ für $i = 1, \dots, n$

Falls n klein, kann JNF aus nur partiellem Wissen über $c_i(A)$ bzw. $d_i(A)$ hergeleitet werden!
$n \le 3$: $\chi_A = d_n(A)$, $\mu_A = c_n(A)$ sind ausreichend!

Satz: A diagonalisierbar $\iff$ JNF von A hat Diagonalgestalt.

Jordan-Normalform (JNF) von A

χ_A zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$, $e_1, \dots, e_m \in \mathbb{N}$ $(\sum e_i = n)$, so dass

$$A \approx \begin{pmatrix} J(\lambda_1, e_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J(\lambda_m, e_m) \end{pmatrix} \leftarrow \text{JNF}$$

Darstellung bis auf RF der $J(\lambda_i, e_i)$ eindeutig, λ_i sind EW von A

Jordan-Kästchen zu gleichen EW in aufsteigender Größe anordnen!

! Nicht alle λ_i müssen verschieden sein!

Jordan-Kästchen $J(\lambda, e)$ zu $\lambda \in K$, $e \in \mathbb{N}$

$J(\lambda, e) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, $J(\lambda, 1) = (\lambda)$

Schreibe $h_i = (t - \lambda_i)^{e_i}$, $i = 1, \dots, m$

Weierstraß-Normalform (WNF) von A

$\exists$ eindeutiges $m \in \mathbb{N}$, eindeutige normierte (nichtkonst.) Polynome $h_1, \dots, h_m \in K[t]$, so dass h_i Potenzen irreduzibler Polynome sind $(i = 1, \dots, m)$ und

$$A \approx B_{h_1, \dots, h_m} \leftarrow \text{WNF}$$

Vorgehen: Zerlege $g_i = h_{i,1} \cdot \ldots \cdot h_{i,k_i}$ für $i = 1, \dots, r$ in irreduzible Faktoren, und setze $\{h_1, \dots, h_m\} = \{h_{1,1}, \dots, h_{1,k_1}, h_{2,1}, \dots, h_{2,k_2}, \dots, h_{r,1}, \dots, h_{r,k_r}\}$

Frobenius-Normalform (FNF) von A

$\exists$ eindeutiges $r \in \mathbb{N}$, eindeutige nicht-konstante, normierte $g_1, \dots, g_r \in K[t]$ mit $g_1 \mid \dots \mid g_r$ und

$$A \approx B_{g_1, \dots, g_r} \leftarrow \text{FNF}$$

Wähle $g_i = c_i(A)$, $i = 1, \dots, r$ (nichtkonstante Invariantenteiler)

Begleitmatrix B_g zu g

$$B_g = \left(\begin{array}{c|c} 0 \cdots 0 & -a_0 \\ \hline E_{m-1} & \begin{array}{c} -a_1 \\ \vdots \\ -a_{m-1} \end{array} \end{array}\right) \in M(m\times m, K)$$

$g = t + a_0 \Rightarrow B_g = (-a_0)$

$g = t^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k t^k \in K[t]$

Satz: $d_m(B_g) = c_m(B_g) = g$, $d_i(B_g) = c_i(B_g) = 1$ $(i = 1, \dots, m-1)$

Begleitmatrix $B_{g_1, \dots, g_r}$ zu $g_1, \dots, g_r \in K[t]$

$$B_{g_1, \dots, g_r} := \begin{pmatrix} B_{g_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{g_r} \end{pmatrix}$$

Satz: Falls $g = g_1 \cdot \ldots \cdot g_r$ mit $g_1, \dots, g_r$ paarw. teilerfremd $\Rightarrow B_g \approx B_{g_1, \dots, g_r}$