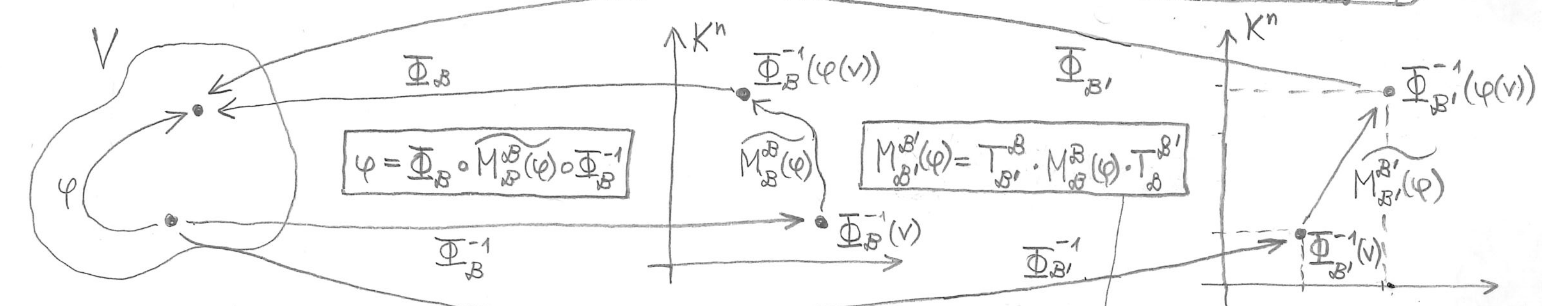
Diagonalisierbarkeit, Eigenwerte und Eigenvektoren, Charakteristisches Polynom

V Vektorraum über Körper K, $\dim(V) = n < \infty$, Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$

Spezialfall: $V = K^n$, $A \in K^{n\times n}$, $\varphi := \tilde{A}: K^n \to K^n$, $\tilde{A}(v) = Av$ $\xrightarrow{\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)}$ $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$

An den Stellen ⊛ kann φ bzw. id_V durch A bzw. E_n ersetzt werden und es entsteht Def. für Matrix A anstatt für φ



Ursprüngliche Abbildung φ in V

„irgendeine" Matrixdarstellung der Abbildung φ

Gewünscht: Matrixdarstellung von φ mit Diagonalmatrix, $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi)$ nur noch Streckung entlang der Koordinaten

φ diagonalisierbar
$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ diagonalisierbar ($\mathcal{B}$ beliebig)

$\xrightarrow{A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)}$

$A \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar
Es gibt $S \in GL(n,K)$: $SAS^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Updownarrow$

Es gibt Basis $\mathcal{B}' = (v_1,\dots,v_n)$ von V mit $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(\varphi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Falls $A = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)$, so ist $S^{-1} = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = (v_1,\dots,v_n)$

D. h. Matrix S kann mit unten stehender Theorie ermittelt werden, indem $\varphi = \tilde{A}$, $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ gesetzt wird.

$\lambda \in K$
$v \in V$

$v \neq 0$ ist Eigenvektor (EV) von φ (zum Eigenwert λ)
$\exists \lambda \in K$: $\varphi(v) = \lambda v$

Satz:
- EV zu verschiedenen EW sind linear unabhängig
- $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \mathrm{Eig}(\varphi,\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(\varphi,\lambda_2) = \{0\}$

Es gibt Basis $\mathcal{B}' = (v_1,\dots,v_n)$ von V aus EV $v_1,\dots,v_n$ von φ zu EW $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

λ ist Eigenwert (EW) von φ (zum Eigenvektor v)
$\exists v \in V\setminus\{0\}$: $\varphi(v) = \lambda v$
⊛ $Av = \lambda v$

Eigenraum $\mathrm{Eig}(\varphi,\lambda)$
$= \{v \in V : \varphi(v) = \lambda v\}$
$= \mathrm{Kern}(\lambda \cdot id_V - \varphi)$
⊛ $= \mathrm{Kern}(\lambda E_n - A)$

enthält alle EV zum EW λ

Satz: φ bijektiv $\Longleftrightarrow$ 0 kein EW von φ

$\chi_\varphi(\lambda) = 0$

Algebraische Vielfachheit $\mu_{alg}(\varphi,\lambda)$ von EW λ
$\mu_{alg}(\varphi,\lambda) := \mu(\chi_\varphi,\lambda)$
Vielfachheit der Nullstelle in χ_φ
⊛ $\mu_{alg}(A,\lambda)$

Geometrische Vielfachheit $\mu_{geo}(\varphi,\lambda)$ von EW λ
$\mu_{geo}(\varphi,\lambda) := \dim \mathrm{Eig}(\varphi,\lambda)$
⊛ $\mu_{geo}(A,\lambda)$

Sind $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ die verschiedenen EW von φ, so gilt $V = \mathrm{Eig}(\varphi,\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Eig}(\varphi,\lambda_k)$

Satz: λ EW von φ $\Longrightarrow \mu_{alg}(\varphi,\lambda) \geq \mu_{geo}(\varphi,\lambda) \geq 1$

χ_φ zerfällt in Linearfaktoren und für alle EW λ von φ gilt:
$\mu_{geo}(\varphi,\lambda) = \mu_{alg}(\varphi,\lambda)$

Charakteristisches Polynom χ_φ von φ
$\chi_\varphi = \det(t \cdot id_V - \varphi) \in K[t]$
$= \det(t \cdot E_n - M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi))$
⊛ $\chi_A = \det(t \cdot E_n - A)$

Satz: χ_φ ist normiert, $\mathrm{grad}(\chi_\varphi) = n$
$\chi_\varphi = t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_0$
mit $c_{n-1} = -\mathrm{Spur}(\varphi)$
$c_0 = (-1)^n \det(\varphi)$

Polynome

K Körper

Keine Abbildung, nur „Objekt".
Später werden verschiedene Objekte für t eingesetzt.

Polynom p über K in Variable t
$\exists m \in \mathbb{N}$, $\exists a_1,\dots,a_m \in K$:
$p = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j$ $\quad t^0 := 1$
Restliche $a_i := 0$, $i \in \mathbb{Z}\setminus\{0,\dots,m\}$

Grad von p
$\mathrm{grad}(p) := \begin{cases} \max\{i \in \mathbb{N}_0 : a_i \neq 0\}, & p \neq 0 \\ -\infty, & p = 0 \end{cases}$

Leitkoeffizient von p
$\ell(p) := a_{\mathrm{grad}(p)}$

p normiert
$\ell(p) = 1$

Gradformel
$\mathrm{grad}(p+q) \leq \max(\mathrm{grad}(p), \mathrm{grad}(q))$
$\mathrm{grad}(p \cdot q) = \mathrm{grad}(p) + \mathrm{grad}(q)$

„$-\infty + a = -\infty$"
„$-\infty + (-\infty) = -\infty$".

Einsetzabbildung $\tilde{p}$ zu p
$\tilde{p}: K \to K$, $\tilde{p}(\lambda) := \sum_{j=0}^{m} a_j \lambda^j$

$\Rightarrow$ Schreibe kurz p statt $\tilde{p}$

Satz: $\# K = \infty \Rightarrow p$ durch $\tilde{p}$ eindeutig bestimmt

Polynomring $K[t]$
$K[t] := \{p$ Polynom über K in Variable t, $\mathrm{grad}(p) < \infty\}$
ist komm. Ring mit 1, wobei für $p = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j t^j$:
$p + q := \sum_{j=0}^{\max(m,n)} (a_j + b_j) t^j$,
$p \cdot q := \sum_{j=0}^{m+n} c_j t^j$, $c_j := \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}$
Nullelement: Nullpolynom $0 \in K$
Einselement: $1 \in K$

$\lambda \in K$ Nullstelle (NS) von p
$p(\lambda) = 0$

Satz: p hat höchstens $\mathrm{grad}(p)$ NS

Vielfachheit $\mu(p,\lambda)$ der NS λ von p
$\mu(p,\lambda) := \max\{\ell \in \mathbb{N}_0 : \exists g \in K[t]$ mit $p = (t-\lambda)^\ell \cdot g\}$

Satz: Polynomdivision
$p, g \in K[t]$
$\Longrightarrow \exists$ eindeutige $q, r \in K[t]$ mit $p = q \cdot g + r$, $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$

$R = K[t]$

$K[t]$ „euklidischer Ring"

$K[t]$ „faktorieller Ring"

Satz: Abspaltung von Linearfaktoren
$\lambda \in K$ NS von p
$\Longrightarrow \exists g \in K[t]$, $\mathrm{grad}(g) = \mathrm{grad}(p) - 1$ mit $p = (t-\lambda) \cdot g$

Ermittlung von g per Polynomdivision

Iteration

Satz: Es gibt $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in K$ (die NS von p) und $g \in K[t]$, sodass g keine NS in K hat und
$p = (t-\lambda_1)^{\mu(p,\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{\mu(p,\lambda_k)} \cdot g$

falls $g \in K$ konstant

p zerfällt in Linearfaktoren
Es gibt $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in K$ (die NS von p) mit

R komm. Ring mit 1
$p, g \in R$

R faktorieller Ring

$K[t]^\times = K^\times = K\setminus\{0\}$

$R^\times$ Menge der Einheiten
$R^\times = \{p \in R : \exists q \in R : p \cdot q = 1\}$

Linearfaktoren sind irreduzibel in $K[t]$
$\lambda \in K \Rightarrow t - \lambda$ ist irreduzibel in $K[t]$

p irreduzibel in R
$\forall g, h \in R$:
$p = g \cdot h \Rightarrow g \in R^\times$ oder $h \in R^\times$

$\Updownarrow$

$g \mid p$, g teilt p

p prim in R

$\varphi^k := \underbrace{\varphi \circ \ldots \circ \varphi}_{k\text{-mal}}$
$\varphi^0 := \mathrm{id}_V$,
$p = \sum_{j=0}^{m} a_j t^j \in K[t] \Rightarrow p(\varphi) := \sum_{j=0}^{m} a_j \varphi^j$

Satz von Cayley-Hamilton
$\chi_\varphi(\varphi) = 0$

⊛ $\chi_A(A) = 0$

Formeln zur Charakterisierung von φ bzw. A und durch Umstellen Formeln für das Inverse von φ bzw. A (falls bij. / invertierbar)

- $\mu_\varphi \mid \chi_\varphi$
- μ_φ, χ_φ haben gleiche NS

Determinante $\det(\Psi)$
$\det(\Psi) := \det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Psi))$

Spur(Ψ)
$= \mathrm{Spur}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\Psi))$

$\Psi \in \mathrm{End}_K(V)$
$C \in K^{n \times n}$

Spur (C)
$= \sum_{i=1}^{n} C_{ii}$
Eigenschaften: $\mathrm{Spur}(CD) = \mathrm{Spur}(DC)$

Spezialfall:
$\chi_\varphi = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{m_k}$
mit verschiedenen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$,
$\Rightarrow \mu_\varphi = (t-\lambda_1)^{m_1'} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{m_k'}$
mit $1 \le m_i' \le m_i$

μ_φ zerfällt in Linearfaktoren und hat nur einfache NS

Minimalpolynom μ_φ von φ
Charakterisiert durch zwei Eig.:
- $\mu_\varphi \in K[t]$ ist normiert und $\mu_\varphi(\varphi) = 0$
- Ist $p \in K[t]$ mit $p(\varphi) = 0 \Rightarrow \mu_\varphi \mid p$

„μ_φ ist normiertes Polynom kleinsten Grades, dass $\mu_\varphi(\varphi) = 0$ erfüllt"

⊛ $\mu_A \in K[t]$ ist normiertes Pol. kleinsten Grades mit $\mu_A(A) = 0$.

Berechnung:
1) Bestimme χ_φ
2) Bestimme Menge H aller möglichen Teiler von χ_φ gemäß ↗, ordne diese gemäß ihres Grades, beginnend mit dem kleinsten
3) Prüfe für alle $p \in H$, ob $p(\varphi) = 0$ (bzw. $p(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\varphi)) = 0$). Das erste p mit $p(\varphi) = 0$ ist μ_φ

$p = (t-\lambda_1)^{\mu(p,\lambda_1)} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{\mu(p,\lambda_k)}$

$K = \mathbb{C}$

Fundamentalsatz der Algebra:
Über $\mathbb{C}$ zerfällt jedes Polynom aus $\mathbb{C}[t]$ in Linearfaktoren

Satz: Teiler von zerlegten Polynomen
Sei $p = (t-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{m_k}$
mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ verschieden, $m_i \in \mathbb{N}$,
- $g \mid p$ $\Rightarrow g = (t-\lambda_1)^{m_1'} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{m_k'}$ mit $0 \le m_i' \le m_i$
- $g \mid p$, g und p haben gleiche NS $\Rightarrow g$ wie oben mit $1 \le m_i' \le m_i$

$\exists h \in R: p = g \cdot h$

Aussehen von Teilern
Ist $p = c \cdot g_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot g_k^{m_k}$ die PFZ und $g \mid p$
$\Rightarrow g = \tilde{c} \cdot g_1^{m_1'} \cdot \ldots \cdot g_k^{m_k'}$
mit $0 \le m_i' \le m_i$, $\tilde{c} \in R^\times$

$\forall g, h \in R$:
$p \mid g \cdot h \Rightarrow p \mid g$ oder $p \mid h$

Existenz eindeutiger Primfaktorzerlegung (PFZ)
Für $p \in R$ existiert Darstellung
$p = c \cdot g_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot g_k^{m_k}$,
wobei $c \in R^\times$, g_i irreduzibel, $m_i \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.
Diese Darstellung ist bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Einheiten eindeutig.

Algebra