UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

Vorbereitungsblatt – Lösungen

Die folgenden Aufgaben dienen der Vorbereitung zur Klausur. Der Schwierigkeitsgrad entspricht dabei in etwa dem Schwierigkeitsgrad der Klausur. Eine „Probeklausur“, die vom Umfang (aber natürlich nicht notwendig von den Themen / Aufgaben) der Klausur entspricht, ergibt sich aus den Aufgaben 0.1 (Lückentext) und 1.1, 3.2 (bei (a), (f) jeweils nur eine der beiden Teilaufgaben), 5.5 und 6.3.

Besprechung Wiederholungsübung:

- Aufgaben 1.1, 1.2, 1.4
- Aufgaben 2.1, 2.4, 2.5, 2.8
- Aufgaben 3.2, 3.5
- Aufgaben 4.1, 4.2, 6.6
- Aufgaben 5.2, 5.5
- Aufgaben 6.2, 6.3, 6.6, 6.9 (evtl. nur Teile)

0 Lückentext

Aufgabe 0.1.

Teil A Pro korrekt ausgefülltem Feld gibt es 0.5 Punkte.

1. Für eine Abbildung $f : X \to Y$ und eine Teilmenge $M \subseteq X$ ist das **Bild** von M unter f definiert als $f(M) := \boxed{}$. Ist $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und S_n die Menge der Permutationen auf $\{1, ..., n\}$, so gilt für die Signum-Funktion sgn: $\operatorname{sgn}(S_n) = \boxed{}$.

2. Seien $(G, *), (H, \cdot)$ Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt Gruppenhomomorphismus, wenn $\forall g_1, g_2 \in G : \boxed{}$.

3. Ist $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Einselement 1 und gilt zusätzlich $\forall\, a \in R \setminus \{0\} : \exists\, a' \in R \setminus \{0\} : \boxed{}$, so ist $(R, +, \cdot)$ sogar ein **Körper**.

4. Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Ist $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, so ist der **Kern** von f definiert durch $\operatorname{Kern}(f) = \boxed{}$. Sind V, W endlichdimensional, so besagt die **Dimensionsformel** für lineare Abbildungen, dass $\dim_K(\operatorname{Kern}(f)) = \boxed{}$.

5. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und $v_1, ..., v_r \in V$. Dann heißt $(v_1, ..., v_r)$ **Erzeugendensystem** von V, wenn $V = \boxed{}$.

6. Sei V ein K–Vektorraum mit Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$. Dann besteht zwischen der von der **Transformationsmatrix** $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ induzierten linearen Abbildung $\widetilde{T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}}$ und den Koordinatenabbildungen $\Phi_{\mathcal{C}}, \Phi_{\mathcal{B}}$ folgender Zusammenhang: $\widetilde{T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}} = \boxed{}$.

7. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix.
   Dann gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Lös}(A, 0)) = \boxed{\qquad\qquad}$. Es gilt $\text{Rang}(A) < n$ genau dann, wenn die Determinante von A erfüllt: $\det(A) \boxed{\qquad\qquad}$.

Teil B Pro korrekt ausgefülltem Feld gibt es 1 Punkt:

1. Sei $\sigma^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{smallmatrix}\right) \in S_5$. Dann gilt in Zykelschreibweise: $\sigma \circ \sigma = \boxed{\qquad\qquad}$.

2. Sei F_6 der in der Vorlesung definierte Ring mit 6 Elementen. Geben Sie die Elemente der folgenden Menge explizit an: $\{x \in F_6 : x^2 = 1\} = \{\boxed{\qquad\qquad}\}$.

3. Ist V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K(V) = 15$ und $U_1, U_2 \subset V$ UVR mit $\dim_K(U_1) = 10$, $\dim_K(U_2) = 6$, so kann $\dim_K(U_1 \cap U_2)$ folgende Werte annehmem: $\dim_K(U_1 \cap U_2) \in \{\boxed{\qquad\qquad}\}$.

4. Für zwei Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ des Standardvektorraums $\mathbb{R}^2$ ist die Transformationsmatrix $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben. Damit gilt $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \boxed{\qquad\qquad}$.

5. Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ ähnlich zueinander ($A \approx B$). Dann besteht folgender Zusammenhang zwischen der Determinante von A und B: $\det(A) = \boxed{\qquad\qquad}$.

1 Gruppen / Gruppenhomomorphismen

Aufgabe 1.1.

Auf $G := \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ definieren wir die Verknüpfung

$$* : G \times G \to G, (a, b) \mapsto a * b := -5 \cdot a \cdot b.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist.
Zeigen Sie auch, dass für $a, b \in G$ wieder $a * b \in G$ gilt.

(b) Wir betrachten die Gruppe $(H, \cdot)$ mit $H := \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ und der üblichen Multiplikation. Zeigen Sie, dass $\varphi : G \to H, x \mapsto -5x$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(G, *) \cong (H, \cdot)$.

Aufgabe 1.2 ([$\star\star\star$]).

Sei $(G, *)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element e_G. Wir betrachten die Abbildung $\varphi : G \to G, \varphi(g) = g * g$.
Zeigen Sie:

(a) φ ist Gruppenhomomorphismus genau dann, wenn G abelsch ist.

Sei nun G abelsch und für jedes $g \in G \backslash \{e_G\}$ gelte $g \neq g'$. Zeigen Sie:

(b) φ ist injektiv.

Aufgabe 1.3.

Wir fassen $(F_6, +_6)$ und $(F_9, +_9)$ als Gruppen auf. Sei $\varphi : F_6 \to F_9$ ein Gruppenhomomorphismus mit $\varphi(1) = 3$.

(a) Berechnen Sie $\varphi^{-1}(\{0\})$ und das Bild $\varphi(F_6)$.

(b) Geben Sie alle Paare $(x, y) \in F_6^2$ an mit $x \cdot y = 0$ und $x \neq 0 \neq y$.

Aufgabe 1.4.
Sei M eine Menge und $G = \{f : M \to M | f \text{ bijektiv}\}$. Auf G definieren wir die Verknüpfung

$$* : G \times G \to G, \quad f * g := g \circ f,$$

wobei „$\circ$“ die Komposition von Abbildungen bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $(G, *)$ ist eine Gruppe.
Zeigen Sie auch, dass für $f, g \in G$ gilt: $f * g \in G$.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi : (G, *) \to (G, \circ), f \mapsto f^{-1}$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass $(G, *) \cong (G, \circ)$.

Aufgabe 1.5.
Sei $(G, *)$ eine Gruppe und $h \in G$. Sei

$$\varphi : G \to G, \quad \varphi(g) := h' * g * h.$$

Zeigen Sie:

(a) φ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(b) φ ist bijektiv.

(c) Falls G abelsch ist, ist $\varphi = \mathrm{id}_G$.

Aufgabe 1.6.
Seien $(G, \otimes)$ und $(H, \odot)$ Gruppen mit neutralen Elementen e_G und e_H. Auf der Menge $U := G \times H$ definieren wir

$$* : U \times U \to U, \quad ((g_1, h_1), (g_2, h_2)) \mapsto (g_1, h_1) * (g_2, h_2) := (g_1 \otimes g_2, h_1 \odot h_2).$$

(a) Zeigen Sie, dass $(U, *)$ eine Gruppe ist.
Hinweis: Der Nachweis der Assoziativität kann weggelassen werden.

(b) Zeigen Sie, dass $\varphi : U \to G, (g, h) \mapsto g$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 1.7.
Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathrm{GL}(n, K)$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K mit der üblichen Matrizenmultiplikation als Verknüpfung.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $A \in G$ gilt: $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

(b) Zeigen Sie, dass $\phi : G \to G, A \mapsto (A^{-1})^t$ ein Gruppenhomomorphismus ist

(c) Zeigen Sie, dass ϕ aus (b) die Gleichung $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_G$ erfüllt. Ist ϕ bijektiv?

2 Zeilenstufenform, Gauß-Algorithmus und Berechnung von Determinanten

Aufgabe 2.1.

Für $x \in \mathbb{R}$ seien die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} x+4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinante in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.2.
Entscheiden Sie mittels der Determinante, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix über $\mathbb{R}$ invertierbar ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x-1 & 0 \\ 1 & 5 & x & 1 \\ x-1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.3.
Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$ und $n \in \mathbb{N}$ sei definiert:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & \ddots & & \vdots & x_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$.
Hinweis zu A: Ziehen sie zunächst von jeder Zeile die 1. Zeile ab, und bearbeiten Sie dann die 1. Spalte mittels der anderen Spalten.

Aufgabe 2.4 ([$\star\star\star$]).
Für einen Körper K seien die folgenden Matrizen über K gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & x \\ 0 & x & -1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \end{pmatrix}$$

(a) Ermitteln Sie, für welche $x \in K$ die Matrizen invertierbar sind ($K \in \{\mathbb{R}, F_7\}$)

(b) Bestimmen Sie A^{-1} für $x = 1$ ($K = \mathbb{R}$)

(c) Bestimmen Sie B^{-1} für $x = 0$ ($K = F_7$)

Aufgabe 2.5 ([$\star\star\star$]).
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 & -2 \\ -6 & -6 & -3 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \in M(4 \times 5, \mathbb{Q})$$

(a) Bestimmen Sie Rang(A).

(b) Geben Sie $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Lös}(A,0)$ an.

(c) Berechnen Sie eine Basis von $\text{Lös}(A,0)$.

(d) Sei $b = (1,3,1,1)^t$. Berechnen Sie $\text{Lös}(A,b)$.

Aufgabe 2.6.
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das folgende lineare Gleichungssystem in $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbb{R}^4$ gegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha x_2 &= 3, \\ x_1 + 2\alpha x_3 + x_4 &= 5\alpha \\ 2x_3 + x_4 &= 1 - 2\alpha \\ -2x_1 + 4x_3 + \alpha x_4 &= 2 + \alpha. \end{aligned}$$

Geben Sie an, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem (a) unendlich viele, (b) keine und (c) genau eine Lösung hat.
Berechnen Sie die Lösung im Falle (a) und im Falle (c) mit $\alpha = -1$.

Aufgabe 2.7.
Gegeben seien $A \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^4$ mit

$$A := \begin{pmatrix} t+4 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie für $t \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $\text{Lös}(A,0)$.

(b) Bestimmen Sie im Fall $t = -2$ die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $\text{Lös}(A,b)$.

Aufgabe 2.8 ([$\star\star\star$]).
Für $a \in \mathbb{R}$ sei das folgende lineare Gleichungssystem in $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$ gegeben:

$$\begin{array}{ccccccc} (a+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a+1 \\ x_1 & + & (a+1)x_2 & + & x_3 & = & a+3 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+1)x_3 & = & -2a-4 \end{array}$$

Geben Sie an, für welche $a \in \mathbb{R}$ das Gleichungssystem (a) unendlich viele, (b) keine und (c) genau eine Lösung hat.
Geben Sie im Falle der Existenz von Lösungen die jeweiligen Lösungsmengen an.

Aufgabe 2.9.
Seien $A, B \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $A \cdot B$.

(b) Geben Sie $\text{Rang}(A)$ und $\text{Rang}(B)$ an.

Aufgabe 2.10.
Bestimmen Sie den Rang der Matrizen $A_1 \in M(3{\times}3, \mathbb{R})$ und $A_2 \in M(3{\times}3, \mathbb{R})$ in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1-a \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

3 Vektorräume

Aufgabe 3.1.
Im Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Prüfen Sie, ob (v_1, v_2, v_3) linear bzw. (v_1, v_2, v_4) linear unabhängig sind.

(b) Finden Sie $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ mit $\sum_{i=1}^{3} \lambda_i v_i = 0$.

(c) Sei $U := \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3)$. Finden Sie einen UVR $W \subset \mathbb{R}^4$, sodass $V = U \oplus W$.

Aufgabe 3.2 ([$\star\star\star$]).
Sei $V = \mathbb{R}^4$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$ und

$$U_1 := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}), \qquad U_2 := \{x = (x_1, ..., x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\}$$

zwei Untervektorräume.

(a) Ermitteln Sie jeweils eine Basis und die Dimension von $\dim_{\mathbb{R}}(U_i)$, $i = 1, 2$.

(b) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)$.

(c) Gilt $V = U_1 \oplus U_2$?

(d) Geben Sie $W \subset V$ an mit $V = U_1 \oplus W$.

(e) Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U) = 1$. Welche Werte kann $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ annehmen?

(f) Überprüfen Sie, ob $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in U_1$.

Aufgabe 3.3.
Es sei $V = F_5^4$ der Standardvektorraum über F_5. Gegeben seien die zwei Untervektorräume

$$U_1 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}), \qquad U_2 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}).$$

(a) Geben Sie eine Basis von U_1,U_2 und $U_1 + U_2$ sowie deren Dimensionen über F_5 an.

(b) Gilt $V = U_1 \oplus U_2$?

Aufgabe 3.4.
Es sei $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$. Zusammen mit der punktweisen Addition $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ und der punktweisen skalaren Multiplikation $(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ bildet V einen $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Nullvektor $O : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, O(x) = 0$.
Wir definieren

$$U_1 := \{f \in V | \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\}, \quad U_2 := \{f \in V | \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U_1, U_2 Untervektorräume von V sind.

(b) Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$.
Hinweis: Für eine beliebige Funktion $f \in V$ betrachten Sie $g \in V$, $g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.

Aufgabe 3.5 ([$\star\star\star$]).
Sei K ein Körper und $V := M(2 \times 2, K)$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über K. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und

$$W_1 := \{B \in V : BA = AB\}, \qquad W_2 := \{B \in V : BA^t = A^t B\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass W_1, W_2 Untervektorräume von V sind.

(b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von W_1, W_2 und geben Sie $\dim_K(W_1)$, $\dim_K(W_2)$ an.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $W_1 + W_2$ und $\dim_K(W_1 \cap W_2)$.

Aufgabe 3.6.
Seien $U, H \subset V$ UVR mit $U \backslash H \neq \emptyset$.

(a) Zeigen Sie: $\dim(H) < \dim(U + H)$.

Gelte nun $\dim(H) = \dim(V) - 1$.

(a) Zeigen Sie: $\dim(U \cap H) = \dim(U) - 1$.

4 Lineare Abbildungen: Eigenschaften, Kern, Bild, Dimensionsformel

Aufgabe 4.1 ([$\star\star\star$]). (a) Welche der folgenden Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind linear? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

(i) $f((x, y)) := \sqrt{2}x - \sqrt{\frac{1}{2}}y$,

(ii) $f((x, y)) := x \cdot y$,

(iii) $f((x, y)) := x + y + 1$,

(iv) $f((x, y)) := (2x + 1)^2 - (4x^2 + 1)$.

(b) Sei $S \in M(n \times n, \mathbb{R}) =: V$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \to V, f(A) = S \cdot A^t$ linear ist.

Aufgabe 4.2 ([$\star\star\star$]).
Gegeben seien die linearen Abbildungen

$$f:\mathbb{Q}^4\to\mathbb{Q}^3,\quad x\mapsto Ax,\qquad A=\begin{pmatrix}2&2&1&2\\-6&-6&-3&-4\\4&4&2&4\end{pmatrix},$$

$$g:\mathbb{Q}^3\to\mathbb{Q}^3, x\mapsto Bx,\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&1\\3&1&1\end{pmatrix}$$

(a) Ermitteln Sie eine Basis von Kern(f).

(b) Berechnen Sie Rang(f) mit der Dimensionsformel.

(c) Ermitteln Sie eine Basis von Bild(f).

(d) Ist f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv?

(e) Berechnen Sie $f^{-1}(\{(1,3,2)^t\})$.

(f) Ist g ein Isomorphismus?

Aufgabe 4.3.
Sei $V=\mathbb{R}^3$ der Standardvektorraum über $\mathbb{R}$. Sei eine lineare Abbildung gegeben durch

$$f:V\to V,\quad f(x)=A\cdot x,\qquad A:=\begin{pmatrix}-1&2&1\\2&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}=(v_1,v_2,v_3)$ mit

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\quad v_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix},$$

eine Basis von V ist.

(b) Geben Sie die Transformationsmatrix $T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2,e_3)}$ an und berechnen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

(c) Berechnen Sie $f(v_1+v_2+v_3)$ als Linearkombination von v_1,v_2,v_3 unter Nutzung von $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.

Aufgabe 4.4.
In dieser Aufgabe fassen wir $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ als Standardvektorräume über $\mathbb{R}$ auf. Seien Basen $\mathcal{B}=(v_1,v_2)$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C}=(w_1,w_2,w_3)$ von $\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix},\qquad w_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad w_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad w_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Eine lineare Abbildung $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ sei nun definiert durch

$$f(v_1)=2w_1+w_2,\quad f(v_2)=w_1+3w_2-2w_3$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrix $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$ an.

(c) Ermitteln Sie die Transformationsmatrizen $T_{(e_1,e_2,e_3)}^{\mathcal{C}}$ sowie $T_{(e_1,e_2)}^{\mathcal{B}}$.

(d) Zeigen Sie, dass $M_{(e_1,e_2,e_3)}^{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(e) Ist f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv?

5 Lineare Abbildungen: Allgemeine Vektorräume, Darstellungsmatrizen, Basiswechsel

Aufgabe 5.1.

Sei V ein 3-dimensionaler F_3-Vektorraum und $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V. Sei $f : V \to V$ gegeben durch $f(v_1) = v_2 + v_3,\ f(v_2) = v_3 + 2v_1,\ f(v_3) = v_1 + v_2$.

(a) Geben Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ an.

(b) Ist f injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv?

Es seien nun $w_1, w_2, w_3 \in V$ definiert durch $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(w_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$ eine Basis von V ist.

(d) Ermitteln Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(f)$.

(e) Berechnen Sie $f(w_1 + w_2 + w_3)$ in Termen von v_1, v_2, v_3.

Aufgabe 5.2 ([$\star\star\star$]).

Für $n \in \mathbb{N}$ sei P_n der Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad $\leq n$. P_n ist mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis ist gegeben durch $\mathcal{B}_n := (p_0, ..., p_n)$, wobei $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_i(x) = x^i$. Definiere weiter

$$q_0(x) = x - 3, \quad q_1(x) = 2 - x$$

Wir definieren die Abbildung

$$f : P_1 \to P_2, \quad p \mapsto [x \mapsto p(x) \cdot x - p(x+1)].$$

(a) Zeigen Sie, dass f tatsächlich eine lineare Abbildung ist.

(b) Ermitteln Sie $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f)$.

(c) Entscheiden Sie auf Basis von $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}(f)$, ob f surjektiv bzw. injektiv bzw. bijektiv ist.

(d) Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

(e) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} := (q_0, q_1)$ eine Basis von P_1 ist.

(f) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}}(f)$.

Aufgabe 5.3.

Für $n \in \mathbb{N}$ sei P_2 der Raum der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 2. P_2 ist mit der punktweisen Addition und skalaren Multiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis ist gegeben durch $\mathcal{B}_2 := (p_0, p_1)$, wobei $p_0(x) = 1, p_1(x) = x$. Definiere weiter

$$q_0(x) = x - 3, \quad q_1(x) = 2 - x$$

Wir definieren die lineare Abbildung $g : P_1 \to P_1$ durch

$$g : P_1 \to P_1, \quad g(q_0) = 2q_0 + q_1, \quad g(q_1) = q_0 + q_1.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{C} := (q_0, q_1)$ eine Basis ist.

(b) Ermitteln Sie $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(g)$.

(c) Berechnen Sie $T^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}_1}$ und $M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_1}(g)$.

(d) Es sei $q \in P_1$, $q(x) = 2x - 3$. Berechnen Sie $g(q)$.

(e) Ist g injektiv bzw. surjektiv bzw. bijektiv?

Aufgabe 5.4.

In dieser Aufgabe fassen wir $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume auf. Eine Basis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ ist gegeben durch $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3, M_4)$, wobei

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, \quad A \mapsto A^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Eine weitere Basis ist die Standardbasis $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$.

(a) Ermitteln Sie $M^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)}(f)$ und $M^{\mathcal{C}}_{(e_1,e_2)}(f)$.

(b) Ermitteln Sie eine Basis von Kern(f) mittels $M^{\mathcal{C}}_{(e_1,e_2)}(f)$.

(c) Bestimmen Sie Rang(f).

(d) Entscheiden Sie, ob f surjektiv bzw. injektiv bzw. bijektiv ist.

(e) Sei $A := 2M_1 + M_2 - M_3$. Ermitteln Sie $f(A)$ mit Hilfe von $M^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)}(f)$.

Aufgabe 5.5 ([$\star\star\star$]).

In dieser Aufgabe fassen wir $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. Sei $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die Standardbasis. Wir betrachten den folgenden Untervektorraum von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$:

$$V := \mathrm{Lin}(E_{11}, E_{12}, E_{22}).$$

mit Basis $\mathcal{C} = (E_{11}, E_{12}, E_{22})$. Eine weitere Basis von V ist gegeben durch $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$, wobei

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten die lineare Abbildung $f : V \to V$ definiert durch

$$f(M_1) = M_1 + M_2 + M_3, \quad f(M_2) = M_1 - M_2, \quad f(M_3) = M_2 + M_3.$$

(a) Ermitteln Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$.

(b) Berechnen Sie $T_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ sowie $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$.

(c) Zeigen Sie, dass $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -4 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$.

(d) Entscheiden Sie, ob f surjektiv bzw. injektiv bzw. bijektiv ist.

(e) Sei $A := 2M_1 + M_2 - M_3$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ermitteln Sie $f(A)$ mittels $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ und $f(B)$ mittels $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(f)$.

Aufgabe 5.6.
Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$.

(a) Zeigen Sie: Es gibt genau ein $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ mit

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2, \qquad (f \circ f)(v_1) = 3v_1 + 4v_2.$$

(b) Geben Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ an.

(c) Ist f ein Isomorphismus?

Aufgabe 5.7.
Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = f$, und $(u_1, ..., u_n)$ eine Basis von $U = \mathrm{Bild}(f)$, und $B = (u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_r)$ eine Basis von V.

(a) Zeigen Sie, dass für $u \in U$ gilt: $f(u) = u$.

(b) Sei $v \in V$ beliebig und $a := v - f(v)$. Zeigen Sie: $f(a) = 0$.

(c) Seien $a_i := v_i - f(v_i)$, $i = 1, ..., r$.

(d) Zeigen Sie, dass auch $B' := (u_1, ..., u_n, a_1, ..., a_r)$ eine Basis von V ist.

(e) Bestimmen Sie $M_{B'}^{B'}(f)$.

6 Beweiskonzepte

Aufgabe 6.1.
Seien A, B, C Mengen und $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen, so dass $g \circ f$ bijektiv ist. Zeigen Sie, dass f injektiv und g surjektiv ist.

Aufgabe 6.2 ([$\star\star\star$]).
Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist injektiv

(b) Für alle $A_1, A_2 \subset A$ gilt: $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.

Aufgabe 6.3 ([$\star\star\star$]).
Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Seien $f, g : V \to W$ lineare Abbildungen.

(a) Seien $v_1, v_2 \in V$ mit $v_1 \neq v_2$ und $f(v_1) = f(v_2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass v_1, v_2 linear unabhängig sind.

(b) Zeigen Sie, dass $U := \{v \in V : f(v) = g(v)\}$ ein UVR von V ist.

(c) Sei nun $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

  (i) $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$.

  (ii) $\mathrm{Kern}(f \circ f) = \mathrm{Kern}(f)$.

Aufgabe 6.4.
Es seien U, V, W Vektorräume über einem Körper K, und $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen.

(a) Sei φ injektiv, ψ surjektiv und $\mathrm{Kern}(\psi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$ gilt. Zeigen Sie: $\dim_K(V) = \dim_K(U) + \dim_K(W)$.

Aufgabe 6.5.
Sei $V \neq \{0\}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K und $f : V \to V$ linear. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Mit $f^k := f \circ ... \circ f$ bezeichnen wie die k-fache Verkettung von f, und wir setzen $f^0 = \mathrm{id}_V$.

(a) Zeigen Sie: Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{Kern}(f^i) \subset \mathrm{Kern}(f^{i+1})$.

(b) Sei $v \in V$ mit $f^n(v) \neq 0$, $f^{n+1}(v) = 0$. Zeigen Sie:

- $f^i(v) \neq 0$ für $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq i \leq n$.
- $v, f(v), f^2(v), ..., f^n(v)$ sind linear unabhängig.

Es gelte nun $f^n = f$.

(c) Es gelte $f^n = f$. Zeigen Sie, dass

$$V = \mathrm{Kern}(f) \oplus \mathrm{Bild}(f).$$

Hinweis: Für ein $v \in V$, zerlegen Sie $v = (v - f^{n-1}(v)) + f^{n-1}(v)$.

Es gelte nun $f^2 = 0$ und $g : V \to V, g(v) := f(v) + v$.

(d) Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(g) \subset \mathrm{Kern}(f)$.

Aufgabe 6.6 ([$\star\star\star$]).
Seien U, V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Seien $f : U \to V$, $g : V \to W$ linear. Sei $\dim(V) = n$. Zeigen Sie, dass

(a) $\mathrm{Rang}(g \circ f) = \mathrm{Rang}(f) - \dim(\mathrm{Bild}(f) \cap \mathrm{Kern}(g))$.
Hinweis: Betrachten Sie die Einschränkung $h = g|_{Bild(f)} : Bild(f) \to W$.

(b) $\mathrm{Rang}(f) + \mathrm{Rang}(g) - n \leq \mathrm{Rang}(g \circ f)$.

(c) $\mathrm{Rang}(g \circ f) \leq \min\{\mathrm{Rang}(f), \mathrm{Rang}(g)\}$.
Hinweis: Zeigen Sie getrennt Rang$(g \circ f) \leq$ Rang(g) und Rang$(g \circ f) \leq$ Rang(f).

Sei nun $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$.

(d) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Rang}(A^t A) = \mathrm{Rang}(A)$.
Hinweis: Verwenden Sie (a). Für ein $v \in Bild(\tilde{A}) \cap Kern(\widetilde{A^t})$ betrachten Sie $v^t v$.

(e) Gelte $A^2 = 0$. Zeigen Sie mit (b), dass $\mathrm{Rang}(A) \leq n/2$.

Konstruktionsaufgaben

Aufgabe 6.7.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit über einem Körper K mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Es sei $U \subset V$ ein Untervektorraum mit $\dim_K(U) = n - 2$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt UVR $U_1, U_2 \subset V$ mit $U_1 \cap U_2 = U$ und $\dim_K(U_1) = \dim_K(U_2) = n - 1$.

(b) Es gibt UVR $U_1, U_2 \subset V$ mit $\dim_K(U_1) = \dim_K(U_2) = 1$ und $V = U \oplus U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe 6.8.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\dim_K(V) = n$. Zeigen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(ii) n ist gerade

Hinweis: Um einen geeigneten Endomorphismus zu definieren, nutzen Sie eine Basis von V.

Aufgabe 6.9 ([$\star\star\star$]).
Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\dim(V) \leq \dim(W)$

(ii) Es gibt eine surjektive lineare Abbildung $g : W \to V$.

Hinweis: Definieren Sie g als eindeutige lineare Abbildung auf einer geeigneten Basis.

Aufgabe 6.10.
Seien V, W endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Sei $f : V \to W$ linear. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$,

(ii) Es gibt eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Aufgabe 6.11.
Seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie: Ist $A \approx B$, so gilt $A^2 \approx B^2$.

Aufgabe 6.12.
Sei $f : V \to V$ linear und V endlichdimensional. Zeigen Sie, dass es eine lineare Abbildung $g : V \to V$ gibt mit $f \circ g \circ f = f$.
Hinweis: Seien $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ Basen von V mit $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = D$, wobei $D = \left(\begin{smallmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $r = Rang(f)$. Nutzen Sie den Darstellungssatz für f, um ein geeignetes g zu definieren.

Aufgabe 6.13.
Sei $A \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) $\mathrm{Rang}(A) \leq 1$.

(ii) Es gibt $u, v \in K^n$ (Spaltenvektoren) mit $A = u \cdot v^t$.

Hinweis: Nutzen Sie die Definition von Rang(A) als Spaltenraum von A.

Aufgabe 6.14.
Sei $A, B \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie: $\mathrm{Rang}(A + B) \leq \mathrm{Rang}(A) + \mathrm{Rang}(B)$.
Hinweis: Schreiben Sie $A = (a_1, ..., a_n)$ und $B = (b_1, ..., b_n)$ mit Spaltenvektoren und nutzen Sie die Definition von Rang$(A + B)$ als Spaltenrang von $A + B$. Schätzen Sie dann geeignet nach oben ab.

Aufgabe 6.15.
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie, dass
$$W := \{v \in V : (f \circ f)(v) = f(v)\}$$
ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 6.16.
Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über einem Körper K mit $\dim_K(V) = n$. Seien $\varphi, \psi : V \to K$ linear mit $\varphi, \psi \neq 0$. Zeigen Sie:

(a) $\dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi)) = n - 1$.

(b) Sind φ, ψ linear abhängig im Vektorraum $\mathrm{Hom}_K(V, K)$ über K, so folgt $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\psi)$.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`