Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

13. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P49 (Berechnung von Determinanten).

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Gegeben seien folgende Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} s & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & s \end{pmatrix},$$

wobei $A_6 \in M(n \times n, \mathbb{Q})$.

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(A_i)$, $i = 1, ..., 6$.
Hinweis für A_6: Addieren Sie zuerst alle Spalten (außer der ersten) einmal auf die erste Spalte.

(b) Berechnen Sie unter Nutzung der Ergebnisse aus (a) die Ausdrücke

$$\det(A_4^{-1} \cdot A_5^t), \qquad \det(A_2 + A_2), \qquad \det(A_2 + A_3), \qquad \det(2A_4^3)$$

(c) Vervollständigen Sie die gegebenen Matrizen so, dass die Gleichungen stimmen:

$$(i) \quad \det(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ \dots & \dots & -4 \\ \dots & \dots & 3 \end{pmatrix}) = 30, \quad (ii) \quad \det(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & \dots & \dots \end{pmatrix}) = 0, \quad (iii) \quad \det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \dots & 3 & 3 & 3 \\ \dots & \dots & 4 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & 6. \end{pmatrix}) = 4.$$

Lösung:

(a)
- $\det(A_1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) = 2$
  (*Regel für* 2×2*-Matrizen*)
- $\det(A_2) = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0$
  (*Regel von Sarrus. Alternativ: Die 3. Zeile ist Summe der ersten beiden Zeilen. Die Zeilen sind also linear abhängig und daher* $\det(A_2) = 0$.)
- $\det(A_3) = (-2) \cdot 1 \cdot (-4) + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) - (-4) \cdot 2 \cdot 1 = 4$
  (*Regel von Sarrus*)
- $\det(A_4) = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 - (-2) \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2 - 4 \cdot 1) = 12$ (*Blockmatrix-Regel*)
-

$$\begin{aligned} \det(A_5) &\overset{\text{Jede Zeile passend mit 1. Zeile addieren}}{=} \det\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &\underset{\text{auf untere Zeilen addieren}}{\overset{\text{Zeilentausch, 2. Zeile}}{=}} -\det\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &\overset{\text{Blockmatrix-Regel}}{=} -\det\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -(-1 \cdot (-1) - 0 \cdot -2)(7 \cdot 2 - 4^2)) = 2 \end{aligned}$$

-
$$\det(A_6) \overset{\text{Jede Spalte auf 1. Spalte addieren}}{=} \det\begin{pmatrix} s+(n-1) & 1 & \dots & \dots & 1 \\ s+(n-1) & s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ s+(n-1) & \vdots & \ddots & s & 1 \\ s+(n-1) & 1 & \dots & 1 & s \end{pmatrix}$$
$$= (s+(n-1))\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & s & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \vdots & \ddots & s & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & s \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{Von jeder Zeile 1. Zeile abziehen}}{=} (s+(n-1))\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & s-1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & s-1 \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{obere Dreiecksmatrix}}{=} (s+(n-1))\cdot(s-1)^{n-1}.$$

(b)
- $\det(A_4^{-1}A_5^t) = \det(A_4^{-1})\det(A_5^t) = \frac{1}{\det(A_4)}\det(A_5) = \frac{1}{6}$
- $\det(A_3 + A_3) = \det(2A_3) = 2^3 \cdot \det(A_3) = 2^3 \cdot 4 = 32.$
- $\det(A_2 + A_3) = \det\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$
$= (-1)\cdot 2\cdot(-3) + 2\cdot 0\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 0\cdot(-1) - \cdot(-3)\cdot 2\cdot 2 = 6$
(*Regel von Sarrus*)
- $\det(2A_4^3) = 2^4\det(A_4)^3 = 2^4\cdot 12^3$

(c) Für die Lösung dieser Aufgabe gibt es viele verschiedene Möglichkeiten. Wir präsentieren hier jeweils nur eine Möglichkeit.

(i) Diese Matrix kann zu einer oberen Dreiecksmatrix ergänzt werden. Dann ist die Determinante das Produkt der Diagonalelemente. Wähle also das mittlere, noch zu füllende Diagonalelement x so, dass $2\cdot 3\cdot x = 30$ ($\Rightarrow x = 5$) und der Rest Nullen (so dass obere Dreiecksmatrix):

$$\det(\left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)) = 30.$$

(ii) Da die Determinante 0 sein soll, muss die Matrix einen Rang ¡ 3 besitzen (d.h. die Zeilen oder Spalten müssen linear abhängig sein). Ergänze die dritte Zeile so, dass sie ein Vielfaches der zweiten Zeile ist:

$$\det(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{smallmatrix}\right)) = 0.$$

(iii) Wir können die Matrix nicht einfach mit Nullen auffüllen (und dann die Regel für obere Dreiecksmatrizen verwenden), weil das Produkt der Diagonalelemente nicht den angegebenen Determinantenwert 4 ergibt. Ausweg: Verwende die Blockmatrix-Regel, d.h. fülle den 2×2-Block unten links in der Matrix mit Nullen auf. Dann gilt:

$$4 \stackrel{!}{=} \det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ \ldots & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & \ldots & 6. \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \ldots & 3 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ \ldots & 6 \end{pmatrix}$$

Wähle nun zum Beispiel die fehlenden Stellen '...' so, dass das Produkt $4 = 1 \cdot 4$ entsteht (hier gibt es aber unendlich viele Möglichkeiten).
Dies erreichen wir mit ... = 2 in der ersten Matrix und ... = 5 in der zweiten Matrix.
Die Ausgangsmatrix lautet also:

$$\det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6. \end{pmatrix}) = 4.$$

Aufgabe P50 (Determinante als Hilfsmittel).
Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha + 2 \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$, wobei $A := (v_1, v_2, v_3)$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 als Spalten hat.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}$ bilden (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$?

(c) Berechnen Sie $\det(B)$.

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist B invertierbar?

Lösung: (a) Es ist

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ \alpha & 2\alpha + 2 & \alpha \\ \alpha - 3 & \alpha - 3 & \alpha - 3 \end{pmatrix}.$$

Damit:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (\alpha - 3) \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ \alpha & 2\alpha + 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{Z1 \leftrightarrow Z3}{=} -(\alpha - 3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & 2\alpha + 2 & \alpha \\ \alpha & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(-\alpha)Z1 + Z2 \to Z2, (-\alpha)Z1 + Z3 \to Z3}{=} -(\alpha - 3) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha + 2 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha & -1 - \alpha \end{pmatrix} \\
&\stackrel{\text{Sarrus}}{=} (\alpha - 3)(\alpha + 2)(\alpha + 1).
\end{aligned}$$

Alternativ kann man auch an jeder beliebigen Stelle obiger Umformungen die Regel von Sarrus oder andere Methoden (Blockmatrixregel, Laplace-Entwicklung) nutzen. Der Vorteil der Erzeugung von Nullen mit elementaren Zeilen/Spaltenumformungen liegt darin, dass die Regel von Sarrus dann weniger Summanden ungleich 0 ergibt und man oft bereits automatisch eine Faktorisierung des Ergebnisses im unbekannten Parameter, hier α, erhält.

(b) Es gilt:

$$\det(A) \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Rang}(A) = 3 \quad \overset{v_1,v_2,v_3 \in \mathbb{Q}^3}{\Longleftrightarrow} \quad (v_1, v_2, v_3) \text{ Basis}$$

Fall 1: $\alpha \in \{3, -2, -1\}$: Dann ist $\det(A) = 0$, d.h. (v_1, v_2, v_3) bilden keine Basis von $\mathbb{Q}^3$.
Fall 2: $\alpha \in \mathbb{Q}\backslash\{3, -2, -1\}$: Dann ist $\det(A) \neq 0$, d.h. (v_1, v_2, v_3) bilden Basis von $\mathbb{Q}^3$.

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\det(B) &\overset{S4 \leftrightarrow S1}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & \alpha \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Zeile 1 geeignet auf Zeilen darunter add.}}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha-3 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z2 \leftrightarrow Z3}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha-3 \end{pmatrix} \\
&\overset{(-2)Z2+Z3 \to Z3}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & \alpha-3 \end{pmatrix} \\
&\overset{Z3+Z4 \to Z4}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-5 \end{pmatrix} \\
&\overset{\text{Obere Dreiecksmatrix}}{=} 1 \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (\alpha - 5) = 6(\alpha - 5).
\end{aligned}$$

(d) Es gilt $\det(B) \neq 0 \iff B$ invertierbar. Daher:
Fall $\alpha = 5$: B nicht invertierbar.
Fall $\alpha \in \mathbb{Q}\backslash\{5\}$: B invertierbar.

Aufgabe P51 (Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes).

Entwicklungssatz von Laplace: Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ eine Matrix über einem Körper K. Dann gilt für $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}) \quad \text{„\textit{Entwicklung nach i-ter Zeile}“} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}) \quad \text{„\textit{Entwicklung nach j-ter Spalte}“},
\end{aligned}$$

wobei A'_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$-Matrix ist, welche durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A hervorgeht.

Für $s \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ definieren wir die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -s & -1 \\ -2 & s-1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & s \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{Q}), \qquad B_n := \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & s \end{pmatrix} \in M(n\times n, \mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{Q}$.

(b) Für welche $s \in \mathbb{Q}$ besitzt das LGS $A \cdot x = 0$ keine, nur eine oder unendlich viele Lösungen?

(c) Zeigen Sie, dass B_n folgende Rekursionsgleichung für $n \geq 4$ erfüllt:

$$\det(B_n) = x \cdot \det(B_{n-1}) + 1.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz angewandt auf die erste Spalte.

(d) Leiten Sie mittels (c) eine explizite Formel für $\det(B_n)$, $n \geq 3$ her und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(A) &\underset{\text{auf jede weitere Zeile addieren}}{\overset{\text{1. Zeile passend}}{=}} \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -s-2 & 2 \\ 0 & s-1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & s-3 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{\text{Entw. 1. Spalte}}{=} \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -s-2 & 2 \\ s-1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & s-3 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{\text{Entw. 3. Zeile}}{=} (s-3)\det\left(\begin{pmatrix} 2 & -s-2 \\ s-1 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= (s-3)(2\cdot 0 - (s-1)(-s-2)) = (s-3)(s-1)(s+2) \end{aligned}$$

(b) Fall 1: $s \in \mathbb{Q} \setminus \{-2, 1, 3\}$. Dann gilt $\det(A) \neq 0$.
$\Longrightarrow$ $\mathrm{Rang}(A) = 4$
$\Longrightarrow$ $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Lös}(A, 0) = 4 - \mathrm{Rang}(A) = 0$
$\Longrightarrow$ $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Lös}(A, 0) = \{0\}$, d.h. $A \cdot x = 0$ hat nur die triviale Lösung.
Fall 2: $s \in \{-2, 1, 3\}$.
$\Longrightarrow$ $\det(A) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Rang}(A) < 4$
$\Longrightarrow$ $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Lös}(A, 0) = 4 - \mathrm{Rang}(A) > 0$
$\Longrightarrow$ $\dim_{\mathbb{Q}} \text{Lös}(A, 0)$ hat unendlich viele Elemente (da Grundkörper $\mathbb{Q}$ unendlich viele Elemente hat), d.h. $A \cdot x = 0$ hat unendlich viele Lösungen.
(Es gibt keinen Fall, indem das LGS keine Lösungen hat).

(c)

$$\begin{aligned} &\det(B_n) \\ \overset{\text{Laplace 1. Spalte}}{=} \; & s \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & s \end{pmatrix}}_{=B_{n-1} \in M((n-1)\times(n-1), \mathbb{Q})} + 1 \cdot (-1)^{n+1} \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ s & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & s & -1 \end{pmatrix}}_{\in M((n-1)\times(n-1), \mathbb{Q})} \\ \overset{\text{obere Dreiecksmatrix}}{=} \; & s \cdot \det(B_{n-1}) + (-1)^{n+1} \cdot (-1)^{n-1} = s \cdot \det(B_{n-1}) + 1. \end{aligned}$$

(d) Wir berechnen zunächst $\det(B_3)$ (darüber gibt die Rekursionsformel aus (c)) keine Auskunft):

$$\det(B_3) \overset{\text{Sarrus}}{=} s^3 - 1 + s. \quad (*)$$

Vermutung für allgemeine Formel:

$$\det(B_n) = s^n + \sum_{k=0}^{n-2} s^k.$$

(immer das Monom mit dem zweithöchsten Grad fehlt).
Beweis mit vollständiger Induktion:

- Induktionsanfang $n = 3$: Siehe (*).
- Induktionsschritt: Die Aussage gelte für $n-1$ (IV). Wir zeigen die Aussage für n:

$$\begin{aligned}\det(B_n) &\overset{(c)}{=} s \cdot \det(B_{n-1}) + 1 \overset{IV}{=} s \cdot \left(s^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-3} s^k\right) + 1 \\ &= s^n + \underbrace{\underbrace{\sum_{k=0}^{n-3} s^{k+1}}_{=\sum_{k=1}^{n-2} s^k} + \underbrace{1}_{=s^0}}_{=\sum_{k=0}^{n-2} s^k} = s^n + \sum_{k=0}^{n-2} s^k.\end{aligned}$$

Aufgabe P52 (Determinanten von linearen Abbildungen).
Für einen Vektorraum V über einem Körper K mit $\dim_K(V) < \infty$ und Basis $\mathcal{B}$ definiert man für $f \in \mathrm{End}_K(V)$: $\det(f) := \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.
Sei P_2 wie aus Aufgabe A41. Definiere folgende lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : P_2 \to P_2, &\qquad p \mapsto [x \mapsto p(2x+2) - 2 \cdot p(x)], \\ g : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), &\qquad A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \\ h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, &\qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1+8x_2+x_3-x_4 \\ 3x_2+x_4 \\ x_1+4x_2+2x_3+3x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(f)$, $\det(g)$ und $\det(h)$.

(b) Entscheiden Sie jeweils auf Basis von (a), ob f, g, h Isomorphismen sind.

Hinweis: Sie dürfen den Laplace'schen Entwicklungssatz aus P51 verwenden.

Lösung:

(a) Wir bestimmen die Darstellungsmatrizen der jeweiligen linearen Abbildungen bzgl. der Standardbasis.

(i) Wir bestimmen zuerst die Bilder der Basis $P := (p_0, p_1, p_2)$ unter f und stellen sie in der Basis P dar.

$$\begin{aligned} (f(p_0))(x) &= 1 - 2\cdot 1 = -1 \implies f(p_0) = -p_0 \\ (f(p_1))(x) &= 2x + 2 - 2 \cdot x = 2 \implies f(p_1) = 2p_0 \\ (f(p_2))(x) &= (2x+2)^2 - 2x^2 = 2x^2 + 8x + 4 \implies f(p_2) = 4p_0 + 8p_1 + 2p_2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad M_P^P(f) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die 2. und 3. Zeile sind linear abhängig. Daher folgt sofort

$$\det(f) = \det(M_P^P(f)) = 0.$$

(ii) Wir bestimmen zuerst die Bilder der Basis $E := (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ unter g und stellen sie in der Basis E dar.

$$\begin{aligned} g(E_{11}) &= E_{11} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = E_{11} + 2E_{12} \\ g(E_{12}) &= E_{12} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = 3E_{11} + 4E_{12} \\ g(E_{21}) &= E_{21} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = E_{21} + 2E_{22} \\ g(E_{22}) &= E_{22} \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = 3E_{21} + 4E_{22} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad M_E^E(g) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir zwei Matrizenblöcke und berechnen

$$\det(g) = \det(M_E^E(g)) = \det(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)) \cdot \det(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)) = (1 \cdot 4 - 2 \cdot 3)^2 = 4.$$

(iii) Direktes Ablesen liefert

$$M_S^S(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir entwickeln nach der 1. Zeile und bekommen

$$\det(h) = \det(M_S^S(h)) = (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = -\det\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right).$$

Entwicklung nach der 2. Zeile liefert

$$\det(h) = (-1)^{2+3} \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \det\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right) = (2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 3.$$

(b) Für alle 3 Aufgaben nutzen wir folgende Argumentation für $f : V \to V$ mit $\dim(V) = n$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M(n \times n, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) \neq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{Rang}(f)}_{=\dim(\mathrm{Bild}(f))\ \mathrm{UVR}} \overset{\mathrm{P44}}{=} \mathrm{Rang}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)) = \underbrace{n}_{=\dim(V)} \\ &\overset{\mathrm{Bild}(f) \subset V}{\Longleftrightarrow} \quad \mathrm{Bild}(f) = V \\ &\Longleftrightarrow \quad f \text{ surjektiv} \\ &\overset{f:V \to V \text{ linear}}{\Longleftrightarrow} \quad f \text{ bijektiv.} \end{aligned}$$

Das bedeutet: $\det(f) \neq 0 \Longleftrightarrow f$ Isomorphismus

(i) $\det(f) = 0 \Rightarrow f$ kein Isomorphismus

(ii) $\det(g) \neq 0 \Rightarrow f$ Isomorphismus

(iii) $\det(h) \neq 0 \Rightarrow f$ Isomorphismus

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`