UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

13. Präsenzblatt

Aufgabe P49 (Berechnung von Determinanten).

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Gegeben seien folgende Matrizen über $\mathbb{Q}$:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_5 := \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_6 := \begin{pmatrix} s & 1 & \dots & 1 \\ 1 & s & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & s \end{pmatrix},$$

wobei $A_6 \in M(n \times n, \mathbb{Q})$.

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(A_i)$, $i = 1, ..., 6$.
Hinweis für A_6: Addieren Sie zuerst alle Spalten (außer der ersten) einmal auf die erste Spalte.

(b) Berechnen Sie unter Nutzung der Ergebnisse aus (a) die Ausdrücke

$$\det(A_4^{-1} \cdot A_5^t), \qquad \det(A_2 + A_2), \qquad \det(A_2 + A_3), \qquad \det(2A_4^3)$$

(c) Vervollständigen Sie die gegebenen Matrizen so, dass die Gleichungen stimmen:

$$(i) \quad \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ ... & ... & -4 \\ ... & ... & 3 \end{pmatrix}\right) = 30, \quad (ii) \quad \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & ... & ... \end{pmatrix}\right) = 0, \quad (iii) \quad \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ ... & 3 & 3 & 3 \\ ... & ... & 4 & 4 \\ ... & ... & ... & 6. \end{pmatrix}\right) = 4.$$

Aufgabe P50 (Determinante als Hilfsmittel).

Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ definieren wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha + 2 \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \alpha \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$, wobei $A := (v_1, v_2, v_3)$ die Vektoren v_1, v_2, v_3 als Spalten hat.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}$ bilden (v_1, v_2, v_3) eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$?

(c) Berechnen Sie $\det(B)$.

(d) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}$ ist B invertierbar?

Aufgabe P51 (Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes).

Entwicklungssatz von Laplace: Sei $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ eine Matrix über einem Körper K. Dann gilt für $i, j \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}) \quad \text{„\textit{Entwicklung nach i-ter Zeile}“} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A'_{ij}) \quad \text{„\textit{Entwicklung nach j-ter Spalte}“},\end{aligned}$$

wobei A'_{ij} die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix ist, welche durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus A hervorgeht.

Für $s \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ definieren wir die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -s & -1 \\ -2 & s-1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & s \end{pmatrix} \in M(4\times 4, \mathbb{Q}), \qquad B_n := \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & -1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & s \end{pmatrix} \in M(n\times n, \mathbb{Q}).$$

(a) Berechnen Sie $\det(A)$ in Abhängigkeit von $s \in \mathbb{Q}$.

(b) Für welche $s \in \mathbb{Q}$ besitzt das LGS $A \cdot x = 0$ keine, nur eine oder unendlich viele Lösungen?

(c) Zeigen Sie, dass B_n folgende Rekursionsgleichung für $n \geq 4$ erfüllt:

$$\det(B_n) = x \cdot \det(B_{n-1}) + 1.$$

Hinweis: Nutzen Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz angewandt auf die erste Spalte.

(d) Leiten Sie mittels (c) eine explizite Formel für $\det(B_n)$, $n \geq 3$ her und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

Aufgabe P52 (Determinanten von linearen Abbildungen).

Für einen Vektorraum V über einem Körper K mit $\dim_K(V) < \infty$ und Basis $\mathcal{B}$ definiert man für $f \in End_K(V)$: $\det(f) := \det(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f))$. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.

Sei P_2 wie aus Aufgabe A41. Definiere folgende lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen über $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : P_2 \to P_2, &\quad p \mapsto [x \mapsto p(2x+2) - 2 \cdot p(x)], \\ g : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), &\quad A \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \\ h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, &\quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 \\ 3x_2 + x_4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten $\det(f)$, $\det(g)$ und $\det(h)$.

(b) Entscheiden Sie jeweils auf Basis von (a), ob f, g, h Isomorphismen sind.

Hinweis: Sie dürfen den Laplace'schen Entwicklungssatz aus P51 verwenden.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`