Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

12. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P45 (Basiswechsel in F_3^n).
In dieser Aufgabe fassen wir F_3^2 und F_3^3 als F_3-Vektorräume auf. Definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

dann ist $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ eine Basis von F_3^2. Seien die linearen Abbildungen $f, g : F_3^2 \to F_3^3$ definiert durch

$$f\Big(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix}x_1+2x_2\\x_1+2x_2\\x_1+2x_2\end{pmatrix}, \qquad g(v_1) := \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad g(v_2) := \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie $M_1 := M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(f)$ und $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(g)$ an.

(b) Ermitteln Sie $T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}$ und $T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}}$.

(c) Berechnen Sie $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(f)$ und $M_2 := M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(g)$ mittels der Basiswechselformel.

(d) Finden Sie Basen $\mathcal{B}$ von F_3^2 und $\mathcal{C}$ von F_3^3, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$.

(e) Gibt es $S \in \mathrm{GL}(3, F_5)$, $T \in \mathrm{GL}(2, F_5)$ mit $M_1 = S \cdot M_2 \cdot T^{-1}$, d.h. gilt $M_1 \sim M_2$?

(f) Sei $h : F_3^2 \to F_3^3$ mit $M_3 := M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(h)$ und seien $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ Basen von F_3^2 bzw. F_3^3 mit $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(h) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie $S \in \mathrm{GL}(3, F_5)$, $T \in \mathrm{GL}(2, F_5)$ in Termen von Transformationsmatrizen an, so dass $M_1 = S \cdot M_3 \cdot T^{-1}$.

Lösung:

(a) (i) Es gilt:

$$f(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} =: Ax$$

Damit folgt nach Vorlesung direkt:

$$M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = A = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\\1&2\end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt:

$$M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(g) = \begin{pmatrix} | & | \\ \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(g(v_1)) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2,e_3)}(g(v_2)) \\ | & | \end{pmatrix}$$

Berechnung von $g(v_i)$ $(i = 1, 2)$ und Darstellung in der Basis (e_1, e_2, e_3):

$$\begin{aligned} g(v_1) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\ g(v_2) &= \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 2e_3 \end{aligned}$$

Dies kann also einfach abgelesen werden.
Damit folgt:

$$M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) (i) Wir bestimmen $T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)} = M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(\mathrm{id}_{F_3^2})$:
Es gilt:

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)} &= \begin{pmatrix} | & | \\ \Phi^{-1}_{(e_1,e_2)}(\mathrm{id}_{F_3^2}(v_1)) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2)}(\mathrm{id}_{F_3^2}(v_2)) \\ | & | \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} | & | \\ \Phi^{-1}_{(e_1,e_2)}(v_1) & \Phi^{-1}_{(e_1,e_2)}(v_2) \\ | & | \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} v_1 &= 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 \\ v_2 &= 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \end{aligned}$$

Damit folgt direkt:

$$T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dies konnte hier wieder direkt abgelesen werden, da der Bildraum mit der Standardbasis (e_1, e_2) ausgestattet war.

(ii) Wir bestimmen $T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}}$:
Nach Aussage 12.5 gilt $T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}} = \left(T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}\right)^{-1}$. Wir bestimmen die Inverse mittels des Algorithmus aus P38:

$$\begin{aligned} T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)} \big| E_2 &= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\overset{Z1+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) = E_2 \big| T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

Damit:

$$T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) (i) Wir berechnen $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(f)$:
Es gilt $T^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2,e_3)} = M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{F_3^3}) = E_3$ (vgl. A44(a)). Damit:

$$\begin{aligned} M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) &= T^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2,e_3)} M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)} = M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Wir berechnen $M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2)}(g)$:
Es gilt $T^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2,e_3)} = M^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2,e_3)}(\mathrm{id}_{F_3^3}) = E_3$ (vgl. A44(a)). Damit:

$$\begin{aligned} M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(g) &= T^{(e_1,e_2,e_3)}_{(e_1,e_2,e_3)} M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(g) T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}} = M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(g) T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Nach Aussage 11.11 müssen wir Kern und Bild von f bestimmen.
Beachte: Es gilt hier direkt $f = \widetilde{M_1}$ (M_1 ist Darstellungsmatrix von f bzgl. Standardbasen), deswegen muss nicht P44 benutzt werden!

(i) Es gilt $\mathrm{Bild}(\widetilde{M_1}) = \mathrm{Spaltenraum}(M_1)$.
Eine Basis ist $w_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
(1. Spalte von M_1; die zweite Spalte ist offensichtlich das Doppelte).

(ii) Weiter gilt: $\mathrm{Kern}(\widetilde{M_1}) = \mathrm{Lös}(M_1, 0)$.
Bestimmung von $\mathrm{Lös}(M_1, 0)$: Bringe M_1 auf SZFS:

$$M_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \overset{(-1)Z1+Z2\to Z2,(-1)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

Aus der SZSF lesen wir ab: Eine Basis von $\mathrm{Lös}(M_1, 0)$ ist $x_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.
Wähle $u_1 \in \widetilde{M_1}^{-1}(\{w_1\})$, z.B. $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (w_1 ist die erste Spalte von M_1).

(w_1) kann zu einer Basis von F_3^3 ergänzt werden durch $w_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $w_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (dann ist (w_1, w_2, w_3) zeilenweise in eine Matrix geschrieben in ZSF). Aussage 11.11 $\Rightarrow$

$$\mathcal{B} = (u_1, x_1), \qquad \mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3)$$

liefern die gewünschte Darstellungsmatrix.

(e) Nein, denn $M_1 \sim M_2$ ist äquivalent zu $\mathrm{Rang}(M_1) = \mathrm{Rang}(M_2)$. Hier ist aber $\mathrm{Rang}(M_1) = \dim_{F_3}(\mathrm{Spaltenraum}(M_1)) = 1$, und $\mathrm{Rang}(M_2) = \dim_{F_3}(\mathrm{Spaltenraum}(M_2)) = 2$.

(f) Aus (d) und den gegebenen Voraussetzungen folgt:

$$T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{C}} M_1 T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{C}'} M_3 T^{\mathcal{B}'}_{(e_1,e_2)}$$

Damit erhalten wir:

$$M_1 = \underbrace{\left(T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{C}}\right)^{-1} \cdot T^{(e_1,e_2,e_3)}_{\mathcal{C}'}}_{=:S} \cdot M_3 \cdot \underbrace{T^{\mathcal{B}'}_{(e_1,e_2)} \cdot \left(T^{\mathcal{B}}_{(e_1,e_2)}\right)^{-1}}_{=:T^{-1}}$$

Aufgabe P46 (Basiswechsel im Polynomraum).

Der Vektorraum der reellen Polynome mit Grad höchstens 2,

$$P_2 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists a_0, a_1, a_2 : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Seien $p_i, q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1, 2)$ und

$$q_0(x) = -x + x^2, \qquad q_1(x) = 1, \qquad q_2(x) = 1 + 3x + 2x^2.$$

Dann bildet $B = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von P_2. Definiere $B' = (q_0, q_1, q_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von P_2 ist.

Definiere die linearen Abbildungen $f, g : P_2 \to P_2$ durch

$$f(p) = [x \mapsto (4x+2) \cdot p(x+1) - 2x \cdot p(-x-1) - 2x \cdot p(x)], \qquad M_B^{B'}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Ermitteln Sie $M_B^B(f)$.

(c) Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T_B^{B'}$ und $T_{B'}^B$.

(d) Berechnen Sie $M_{B'}^{B'}(f)$ und $M_B^B(g)$ mit Hilfe der Basiswechselformel.

(e) Berechnen Sie $f(q_2)$ und $g(p_2)$ mittels der in (d) bestimmten Darstellungsmatrizen.

Lösung:

(a) *Möglichkeit 1:* Elementares Nachrechnen zum Beispiel der linearen Unabhängigkeit.
Möglichkeit 2 (Nachrechnen im $\mathbb{R}^3$): Vorgehen:

- Zeige, dass $(v_0, v_1, v_2) := (\Phi_B^{-1}(q_0), \Phi_B^{-1}(q_1), \Phi_B^{-1}(q_2))$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ sind.
- Da $\Phi_B : \mathbb{R}^3 \to P_2$ ein Isomorphismus ist, sind damit auch q_0, q_1, q_2 linear unabhängig und damit Basis von P_2 (da $\dim_{\mathbb{R}}(P_2) = 3$).

Berechnung von (v_0, v_1, v_2):

$$q_0 = -1 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 \quad \Longrightarrow \quad v_0 = \Phi_B^{-1}(q_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$q_1 = 1 \cdot p_0 \quad \Longrightarrow \quad v_1 = \Phi_B^{-1}(q_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$q_2 = 1 \cdot p_0 + 3 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 \quad \Longrightarrow \quad v_2 = \Phi_B^{-1}(q_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Um zu prüfen, ob (v_0, v_1, v_2) linear unabhängig ist, gibt es 2 Möglichkeiten, welche auf dieselbe Rechnung hinauslaufen:

(1) Bestimme mittels des Gauß-Algorithmus eine Basis von $U = \mathrm{Lin}(v_0, v_1, v_2)$, d.h. bringe

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

auf Zeilenstufenform.
Erhält man 3 Nicht-Nullzeilen, so gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$ und damit ist (v_0, v_1, v_2) eine Basis.

(2) Seien $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$. Dies ist äquivalent zum Finden von $\mathrm{Lös}(A, 0)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bringe A auf Zeilenstufenform. Erhält man 3 Nicht-Nullzeilen, so ist $\mathrm{Lös}(A, 0) = \{0\}$, d.h. dann folgt $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Wir zeigen hier nur Ansatz (1):

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{Z1\leftrightarrow Z2,-Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \overset{3Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aus der ZSF lesen wir ab: $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$. Damit ist (v_0, v_1, v_2) eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Da Φ_B^{-1} ein Isomorphismus ist, muss $(q_0, q_1.q_2)$ bereits eine Basis von P_2 sein.

(b) Es gilt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(f(p_0)) & \Phi_B^{-1}(f(p_1)) & \Phi_B^{-1}(f(p_2)) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Berechnung von $f(p_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ und Darstellung in der Basis B:

$$\begin{aligned} (f(p_0))(x) &= (4x+2)\cdot 1 - 2x\cdot 1 - 2x\cdot 1 = 2, \\ (f(p_1))(x) &= (4x+2)\cdot(x+1) - 2x\cdot(-x-1) - 2x\cdot x = 2 + 8x + 4x^2, \\ (f(p_2))(x) &= (4x+2)\cdot(x+1)^2 - 2x\cdot(-x-1)^2 - 2x\cdot x^2 = 2 + 6x + 6x^2 \end{aligned}$$

Daher erhalten wir:

$$f(p_0) = 2p_0, \quad f(p_1) = 2p_0 + 8p_1 + 4p_2, \quad f(p_2) = 2p_0 + 6p_1 + 6p_2$$

Damit folgt:

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(c)
- Wir bestimmen $T_B^{B'} = M_B^{B'}(\mathrm{id}_{P_2})$:
  Es gilt:

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}(q_0)) & \Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}(q_1)) & \Phi_B^{-1}(\mathrm{id}_{P_2}(q_2)) \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_B^{-1}(q_0) & \Phi_B^{-1}(q_1) & \Phi_B^{-1}(q_2) \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

  Berechnung von $\mathrm{id}_{P_2}(q_i)$ $(i = 0, 1, 2)$ und Darstellung in der Basis B:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_{P_2}(q_0) &= \phantom{p_0 + {}} - p_1 + p_2, \\ \mathrm{id}_{P_2}(q_1) &= p_0, \\ \mathrm{id}_{P_2}(q_2) &= p_0 + 3p_1 + 2p_2 \end{aligned}$$

  Damit folgt direkt:

$$T_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Wir bestimmen $T_{B'}^B$:
  Nach Aussage 12.5 gilt $T_{B'}^B = \left(T_B^{B'}\right)^{-1}$. Wir bestimmen die Inverse mittels des Algorithmus aus P38:

$$\begin{aligned} T_B^{B'}\big|E_3 &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ &\overset{Z1\leftarrow Z3,Z1+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ &\underset{-Z3+Z2\to Z2,(-2)Z3+Z1\to Z1}{\overset{(1/5)Z2\to Z2,Z2\leftrightarrow Z3}{\rightsquigarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right) = E_3\big|T_{B'}^B \end{aligned}$$

Damit:

$$T_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

(d)
- Bestimme $M_{B'}^{B'}(f)$:

$$\begin{aligned} M_{B'}^{B'}(f) &= T_{B'}^{B} \cdot M_{B}^{B}(f) \cdot T_{B}^{B'} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 6 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Bestimme $M_{B}^{B}(g)$:
  Es gilt $T_{B}^{B} = M_{B}^{B}(\mathrm{id}_{P_2}) = E_3$ (vgl. A44(a)). Damit:

$$\begin{aligned} M_{B}^{B}(g) &= T_{B}^{B} \cdot M_{B}^{B'}(g) \cdot T_{B'}^{B} = M_{B}^{B'}(g) \cdot T_{B'}^{B} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e)
- Es folgt:

$$\begin{aligned} f(q_2) &= (\Phi_{B'} \circ \widetilde{M_{B'}^{B'}(f)} \circ \Phi_{B'}^{-1})(q_2) = (\Phi_{B'} \circ \widetilde{M_{B'}^{B'}(f)})(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \\ &= \Phi_{B'}(M_{B'}^{B'}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \Phi_{B'}(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{smallmatrix}\right)) = 12q_2 \end{aligned}$$

- Es gilt:

$$\begin{aligned} g(p_2) &= (\Phi_{B} \circ \widetilde{M_{B}^{B}(g)} \circ \Phi_{B}^{-1})(p_2) = (\Phi_{B} \circ \widetilde{M_{B}^{B}(g)})(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) \\ &= \Phi_{B}(M_{B}^{B}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = \Phi_{B}(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)) = 3p_1 + p_2 \end{aligned}$$

Aufgabe P47 (Angabe von linearen Abbildungen mittels Darstellungsmatrix).
Sei V ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Ferner sei $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeben über die Darstellungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) := \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ -20 & -5 & 15 \\ -7 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ definiert durch:

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{Q}^3$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ unter Nutzung der Basiswechselformel.

(c) Finden Sie zwei Basen $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von V, so dass $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} E_{\mathrm{Rang}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Elemente von $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sollen in der Form $\Phi_B(c)$ mit geeigneten $c \in \mathbb{Q}^3$ angegeben werden.

Lösung:

(a) Wir zeigen, dass $(u_1, u_2, u_3) := (\Phi_B^{-1}(v_1), \Phi_B^{-1}(v_2), \Phi_B^{-1}(v_3))$ eine Basis in $\mathbb{Q}^2$ ist.
$\overset{\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{Q}^3 \to V \text{ Isomorphismus}}{\Longrightarrow}$ (v_1, v_2, v_3) ist Basis von V.
Detaillierte Argumentation (nicht verlangt) vergleiche Aufgabe 46(a).
Schreibe (u_1, u_2, u_3) als Zeilen in eine Matrix und bilde die Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{2Z1+Z2\to Z2\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-\frac{3}{4})Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt: $U = \mathrm{Lin}(u_1, u_2, u_3) \subset \mathbb{Q}^3$ erfüllt $\dim_{\mathbb{Q}}(U) = 3 \Rightarrow U = \mathbb{Q}^3 \Rightarrow (u_1, u_2, u_3)$ Basis von $\mathbb{Q}^3$.

(b) Transformationsformel $\Rightarrow$

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) = T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

Wir berechnen $T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ und $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:

- Berechnung von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$:
  Herleitung (nicht verlangt):
  Möglichkeit 1: Gegeben ist für $i = 1, 2, 3$:

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) \overset{\mathcal{B}'=(v_1,v_2,v_3)}{=} \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}(e_i) \overset{Def.\ T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}}{=} T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} e_i \overset{Matrixmult.}{=} i\text{-te Spalte von } T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}.$$

  Möglichkeit 2: Wegen $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ gilt:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(id_V) = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_1) & \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_2) & \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_3) \\ | & | & | \end{pmatrix}.$$

  Damit lässt sich die Matrix $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ direkt aus den gegebenen $\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i)$, $i = 1, 2, 3$ ablesen:

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnung von $T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$:
  Es gilt (vgl. Aussage 12.5):

$$T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}$$

  Berechnung des Inversen von $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ mittels Aufgabe P38:

$$\begin{aligned}
T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}|E_3 &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-2)Z1+Z2\to Z2,(-2)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{\frac{1}{4}Z2\to Z2,(-3)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \\
&\overset{(-\frac{4}{5})Z3\to Z3,2Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{6}{4} & 0 & \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right) \\
&\overset{(-\frac{3}{4})Z3+Z2\to Z2,(-\frac{3}{2})Z3+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt folgt damit:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) &= T_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ -20 & -5 & 15 \\ -7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(c) Laut 11.11 sind Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$ zu bestimmen.
Da f nicht direkt bekannt ist, nutzen wir Darstellungsmatrizen von f und Aufgabe P44. Die Bestimmung von Kern und Bild ist leichter, je leichter (d.h. je mehr Nullen, nettere Zahlen) die Darstellungsmatrix ist. Daher nehmen wir $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$. Wir wenden zunächst die Ergebnisse von 11.11 direkt auf $\widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}$ an und übertragen sie dann auf f.

- Es gilt $\mathrm{Bild}(\widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)})) = \mathrm{Spaltenraum}(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f))$.
  Eine Basis ist $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) := (\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, diese kann durch $\tilde{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{Q}^3$ ergänzt werden.
- Es gilt $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(\widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)})) = \mathrm{Lös}(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f), 0)$. Bestimmung von $\mathrm{Lös}(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f), 0)$ mittels Gauß-Algorithmus:

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f) \overset{Z1 \leftrightarrow Z2, (-1)Z2+Z3 \to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-1)Z2+Z1 \to Z1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Aus SZFS lesen wir ab: Eine Basis von $\mathrm{Lös}(M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f), 0)$ ist $\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

  Wähle $\tilde{u}_1 \in \widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}^{-1}(\tilde{w}_1)$, z.B. $\tilde{u}_1 = e_1$ ($\tilde{w}_1$ ist 1. Spalte von $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$), analog $\tilde{u}_2 \in \widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}^{-1}(\tilde{w}_2)$, z.B. $\tilde{u}_2 = e_2$.

Definiere:

$$w_i := \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{w}_i), \quad x_i := \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{x}_i), \quad u_i := \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{u}_i).$$

- Wegen P44 gilt: $\mathrm{Bild}(f) = \Phi_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Bild}(\widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}))$.
  $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ Basis von $\mathrm{Bild}(\widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)})$, $\Phi_{\mathcal{B}'}$ Isomorphismus $\Rightarrow (w_1, w_2)$ Basis von $\mathrm{Bild}(f)$, (w_1, w_2, w_3) Basis von V.
- Wegen P44 gilt: $\mathrm{Kern}(f) = \Phi_{\mathcal{B}'}(\mathrm{Kern}(\widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}))$.
  $(\tilde{x}_1)$ Basis von $\mathrm{Kern}(\widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)})$, $\Phi_{\mathcal{B}'}$ Isomorphismus $\Rightarrow (x_1)$ Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.
  $f = \Phi_{\mathcal{B}'} \circ \widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}^{-1}$, $\tilde{u}_i \in \widetilde{M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)}^{-1}(\tilde{w}_i) \Rightarrow u_i \in f^{-1}(w_i)$.

Die gesuchten Basen sind also: $\mathcal{C} = (u_1, u_2, x_1)$, $\mathcal{C}' = (w_1, w_2, w_3)$.
Aufgrund der verlangten Darstellung $\Phi_{\mathcal{B}}(c)$ der Vektoren wäre der folgende Schritt als einziges nicht nötig gewesen, wenn wir statt mit $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ mit $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ gearbeitet hätten. Dafür wären aber die obigen Rechnungen (Bestimmung Kern/Bild) komplizierter gewesen.
Wegen

$$\tilde{w}_i = \Phi_{\mathcal{B}'}(\tilde{w}_i) \overset{\tilde{T}^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}'}}{=} \Phi_{\mathcal{B}}(T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \tilde{w}_i)$$

usw. erhalten wir:

$$w_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}} \tilde{w}_1) = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad w_2 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}), \qquad w_3 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}),$$

und

$$x_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}), \quad u_1 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}), \quad u_2 = \Phi_{\mathcal{B}}(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Aufgabe P48 (Beweise mit ähnlichen Matrizen).
Sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt nilpotent, falls

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : A^k = 0.$$

Seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \approx B$ und A nilpotent, so ist B nilpotent.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$ über K. Eine Abbildung $f : V \to V$ nennen wir nilpotent, falls $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ nilpotent ist.

(b) Zeigen Sie, dass obige Definition für die Nilpotenz wohldefiniert ist (d.h. nicht von der Basis $\mathcal{B}$ abhängt).

Lösung:

(a) Seien $A, B \in M(n \times n, K)$, $A \approx B$ und A nilpotent.
$\implies \exists\, S \in \mathrm{GL}(n, K) : B = SAS^{-1}$, $\exists k \in \mathbb{N} : A^k = 0$
Dann gilt:

$$B^k = (SAS^{-1})^k = SA\underbrace{S^{-1}S}_{=E_n}A\underbrace{S^{-1}S}_{=E_n}A \cdot \ldots \cdot A\underbrace{S^{-1}S}_{=E_n}AS^{-1} = S \cdot \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{k-\text{ mal}} \cdot S^{-1}$$
$$= SA^kS^{-1} \overset{A \text{ nilpotent}}{=} 0$$

$\implies B$ ist nilpotent.

(b) Es sei $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ ist nilpotent.
Sei $\mathcal{B}'$ eine weitere Basis von V. Dann gilt

$$M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) \cdot \underbrace{T^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}}}_{=\left(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1}},$$

d.h. $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f) \approx M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$.
$\overset{(a)}{\implies} M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(f)$ ist nilpotent.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`