Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

12. Präsenzblatt

Aufgabe P45 (Basiswechsel in F_3^n).
In dieser Aufgabe fassen wir F_3^2 und F_3^3 als F_3-Vektorräume auf. Definiere

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann ist $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ eine Basis von F_3^2. Seien die linearen Abbildungen $f, g : F_3^2 \to F_3^3$ definiert durch

$$f\Big(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}, \qquad g(v_1) := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(v_2) := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie $M_1 := M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(f)$ und $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2,e_3)}(g)$ an.

(b) Ermitteln Sie $T^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}$ und $T^{(e_1,e_2)}_{\mathcal{A}}$.

(c) Berechnen Sie $M^{\mathcal{A}}_{(e_1,e_2)}(f)$ und $M_2 := M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(g)$ mittels der Basiswechselformel.

(d) Finden Sie Basen $\mathcal{B}$ von F_3^2 und $\mathcal{C}$ von F_3^3, so dass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(e) Gibt es $S \in \mathrm{GL}(3, F_5)$, $T \in \mathrm{GL}(2, F_5)$ mit $M_1 = S \cdot M_2 \cdot T^{-1}$, d.h. gilt $M_1 \sim M_2$?

(f) Sei $h : F_3^2 \to F_3^3$ mit $M_3 := M^{(e_1,e_2)}_{(e_1,e_2,e_3)}(h)$ und seien $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$ Basen von F_3^2 bzw. F_3^3 mit $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{C}'}(h) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Geben Sie $S \in \mathrm{GL}(3, F_5)$, $T \in \mathrm{GL}(2, F_5)$ in Termen von Transformationsmatrizen an, so dass $M_1 = S \cdot M_3 \cdot T^{-1}$.

Aufgabe P46 (Basiswechsel im Polynomraum).
Der Vektorraum der reellen Polynome mit Grad höchstens 2,

$$P_2 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists a_0, a_1, a_2 : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\}$$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Seien $p_i, q_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $p_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1, 2)$ und

$$q_0(x) = -x + x^2, \qquad q_1(x) = 1, \qquad q_2(x) = 1 + 3x + 2x^2.$$

Dann bildet $B = (p_0, p_1, p_2)$ eine Basis von P_2. Definiere $B' = (q_0, q_1, q_2)$.

(a) Zeigen Sie, dass B' eine Basis von P_2 ist.

Definiere die linearen Abbildungen $f, g : P_2 \to P_2$ durch

$$f(p) = [x \mapsto (4x + 2) \cdot p(x + 1) - 2x \cdot p(-x - 1) - 2x \cdot p(x)], \qquad M^{B'}_{B}(g) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 12 \\ -1 & 0 & 8 \end{smallmatrix}\right).$$

(b) Ermitteln Sie $M_B^B(f)$.

(c) Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T_B^{B'}$ und $T_{B'}^B$.

(d) Berechnen Sie $M_{B'}^{B'}(f)$ und $M_B^B(g)$ mit Hilfe der Basiswechselformel.

(e) Berechnen Sie $f(q_2)$ und $g(p_2)$ mittels der in (d) bestimmten Darstellungsmatrizen.

Aufgabe P47 (Angabe von linearen Abbildungen mittels Darstellungsmatrix).
Sei V ein $\mathbb{Q}$–Vektorraum und $\mathcal{B}$ eine Basis von V. Ferner sei $f \in \mathrm{End}(V)$ gegeben über die Darstellungsmatrix

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 6 & -1 & -7 \\ -20 & -5 & 15 \\ -7 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Weiterhin seien $v_1, v_2, v_3 \in V$ definiert durch:

$$\Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \in \quad \mathbb{Q}^3$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}' := (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(f)$ unter Nutzung der Basiswechselformel.

(c) Finden Sie zwei Basen $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ von V, so dass $M_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} E_{\mathrm{Rang}(f)} & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Elemente von $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ sollen in der Form $\Phi_B(c)$ mit geeigneten $c \in \mathbb{Q}^3$ angegeben werden.

Aufgabe P48 (Beweise mit ähnlichen Matrizen).
Sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt nilpotent, falls

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : A^k = 0.$$

Seien $A, B \in M(n \times n, K)$. Zeigen Sie:

(a) Ist $A \approx B$ und A nilpotent, so ist B nilpotent.

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum mit Basis $\mathcal{B}$ über K. Eine Abbildung $f : V \to V$ nennen wir nilpotent, falls $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ nilpotent ist.

(b) Zeigen Sie, dass obige Definition für die Nilpotenz wohldefiniert ist (d.h. nicht von der Basis $\mathcal{B}$ abhängt).

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`