



11. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P41 (Darstellungsmatrix für Abbildungen zwischen Polynomräumen).

Für $D \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum der Polynome

$$P_D = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists a_0, \dots, a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^D a_k x^k\}$$

über \mathbb{R} . Für $i = 0, \dots, D$ sei $p_i \in P_D$ mit $p_i(x) := x^i$. Es ist bekannt, dass $B_D = (p_0, \dots, p_D)$ eine Basis von P_D bildet. Gegeben seien die beiden linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f : P_3 &\rightarrow P_2, & p &\mapsto [x \mapsto (x+1) \cdot p'(x) - 3p(x)], \\ g : P_2 &\rightarrow P_2, & p &\mapsto [x \mapsto p(x) \cdot (x+1) - p(x+1) \cdot x]. \end{aligned}$$

- Geben Sie Φ_{B_3} und $\Phi_{B_3}^{-1}$ an.
- Sei $p \in P_3$ definiert durch $p(x) = 2x^3 - 3x + 2$. Geben Sie die Koordinaten von p bzgl. B_3 an, d.h. bestimmen Sie $\Phi_{B_3}^{-1}(p)$.
- Bestimmen Sie $M_{B_2}^{B_3}(f)$ und $M_{B_2}^{B_2}(g)$.
- Berechnen Sie $f(p)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_{B_2} \circ \widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)} \circ \Phi_{B_3}^{-1}$.
- Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(f)$ und $\text{Kern}(f)$ mittels Aufgabe P44.
- Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}} \text{Bild}(g)$ und $\text{Bild}(g)$ mittels Aufgabe P44.

Lösung:

- (a) (i) Wir bestimmen Φ_B :
Es gilt $\Phi_{B_3}(e_i) = p_{i-1}$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Daher

$$\Phi_{B_3} : \mathbb{R}^4 \rightarrow P_3, \quad \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \mapsto a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$$

- (ii) Wir bestimmen Φ_B^{-1} :
Es gilt $\Phi_{B_3}^{-1}(p_{i-1}) = e_i$ für $i = 1, 2, 3, 4$. Daher

$$\Phi_{B_3}^{-1} : P_3 \rightarrow \mathbb{R}^4, \quad p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 \mapsto \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Mit Teilaufgabe (a) erhalten wir

$$\Phi_{B_3}^{-1}(p) = \Phi_{B_3}^{-1}(2p_0 - 3p_1 + 0p_2 + 2p_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) (i) In den Spalten der Koordinatenmatrix stehen die Koordinaten bzgl. B_2 der Bilder der Basis B_3 unter f , d.h.

$$M_{B_2}^{B_3}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_0)) & \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_1)) & \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_2)) & \Phi_{B_2}^{-1}(f(p_3)) \\ \hline \end{array} \right)$$

Wir bestimmen die Bilder der Basis (p_0, p_1, p_2, p_3) unter f und stellen sie mit Hilfe der Basis B_2 dar. Es gilt

$$\begin{aligned} (f(p_0))(x) &= (x+1) \cdot 0 - 3 \cdot 1 = -3 = -3p_0(x), \\ (f(p_1))(x) &= (x+1) - 3x = -2x + 1 = p_0(x) - 2p_1(x), \\ (f(p_2))(x) &= (x+1)2x - 3x^2 = -x^2 + 2x = 2p_1(x) - p_2(x), \\ (f(p_3))(x) &= (x+1)3x^2 - 3x^3 = 3x^2 = 3p_2(x). \end{aligned}$$

$$\implies f(p_0) = -3p_0, \quad f(p_1) = p_0 - 2p_1, \quad f(p_2) = 2p_1 - p_2, \quad f(p_3) = 2p_2$$

$$\implies M_{B_2}^{B_3}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Es gilt:

$$M_{B_2}^{B_2}(g) = \left(\begin{array}{c|c|c} \Phi_{B_2}^{-1}(g(p_0)) & \Phi_{B_2}^{-1}(g(p_1)) & \Phi_{B_2}^{-1}(g(p_2)) \\ \hline \end{array} \right).$$

Wir bestimmen die Bilder der Basis (p_0, p_1, p_2) unter g und stellen sie mit Hilfe der Basis B_2 dar:

$$\begin{aligned} (g(p_0))(x) &= 1 \cdot (x+1) - 1 \cdot x = 1 = p_0(x) \\ (g(p_1))(x) &= x(x+1) - (x+1)x = 0 \\ (g(p_2))(x) &= x^2(x+1) - (x+1)^2x = -x^2 - x = -p_1(x) - p_2(x) \end{aligned}$$

$$\implies g(p_0) = p_0, \quad g(p_1) = 0, \quad g(p_2) = -p_1 - p_2$$

$$\implies M_{B_2}^{B_2}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) (i) Wir berechnen $f(p)$ direkt:

$$\begin{aligned} (f(p))(x) &= (x+1)(6x^2 - 3) - 3(2x^3 - 3x + 2) = -9 + 6x + 6x^2 \\ &= -9p_0(x) + 6p_1(x) + 6p_2(x) \end{aligned}$$

$$\implies f(p) = -9p_0 + 6p_1 + 6p_2$$

(ii) Wir berechnen $f(p)$ mittels der gegebenen Formel: Es gilt

$$\begin{aligned} f(p) &= (\Phi_{B_2} \circ \widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)} \circ \Phi_{B_3}^{-1})(2p_3 - 3p_1 + 2p_0) = (\Phi_{B_2} \circ \widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)}) \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \Phi_{B_2} \left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \Phi_{B_2} \left(\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right) = -9p_0 + 6p_1 + 6p_2. \end{aligned}$$

(e) Mit Aufgabe P44(a) gilt:

$$\text{Kern}(f) = \Phi_{B_3}(\text{Kern}(\widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)})) = \Phi_{B_3}(\text{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)).$$

Es ist also $\text{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)$ zu bestimmen. Wir bringen zunächst die Matrix $M_{B_2}^{B_3}(f)$ in strenge Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned} M_{B_2}^{B_3}(f) &\xrightarrow{(-1/3)Z_1 \rightarrow Z_1, (-1/2)Z_2 \rightarrow Z_2, -Z_3 \rightarrow Z_3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{(1/3)Z_2 + Z_1 \rightarrow Z_1, (-1/2)Z_2 \rightarrow Z_2, -Z_3 \rightarrow Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{Z_3 + Z_2 \rightarrow Z_2, (-1/2)Z_2 \rightarrow Z_2, (1/3)Z_3 + Z_1 \rightarrow Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} =: Z \end{aligned}$$

Die Position der Pivotelemente ist gegeben über $(j_1, j_2, j_3) = (1, 2, 3)$. Sei F die Matrix, welche durch Streichen der Spalten j_1, j_2, j_3 von Z hervorgeht. Eine Basis von $\text{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)$ ist dann gegeben durch $w \in \mathbb{R}^4$, wobei

$$\begin{pmatrix} w_{j_1} \\ w_{j_2} \\ w_{j_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = -F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und

$$w_4 = e_1 = (1) \in \mathbb{R}.$$

$$\implies \text{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0) = \text{Lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Lin}(w).$$

$$\implies \text{Kern}(f) = \Phi_{B_3}(\text{Lös}(M_{B_2}^{B_3}(f), 0)) = \Phi_{B_3}(\text{Lin}(w)) = \text{Lin}(\Phi_{B_3}(w)) = \text{Lin}(p_0 + 3p_1 + 3p_2 + p_3).$$

$$\implies \dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(f) = 1$$

(f) Wir nutzen Aufgabe P44 (b) aus: $\text{Bild}(g) = \Phi_{B_2}(\text{Bild}(\widetilde{M_{B_2}^{B_2}(g)}))$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\widetilde{M_{B_2}^{B_2}(g)}) &= \widetilde{M_{B_2}^{B_2}(g)}(\mathbb{R}^3) = \text{Spaltenraum}(M_{B_2}^{B_2}(g)) \\ &= \text{Lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \text{Lin} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Daher:

$$\begin{aligned} \text{Bild}(g) &= \Phi_{B_2}(\widetilde{\text{Bild}(M_{B_2}^{B_2}(g))}) = \Phi_{B_2}(\text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)) = \text{Lin}\left(\Phi_{B_2}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \Phi_{B_2}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \text{Lin}(p_0, -p_1 - p_2). \\ \implies \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(g)) &= 2 \end{aligned}$$

Aufgabe P42 (Darstellungsmatrizen in \mathbb{R}^2).

Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x.$$

zwischen den \mathbb{R} -Vektorräumen \mathbb{R}^2 . Gegeben seien weiter die beiden Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sodass $B = (v_1, v_2)$ eine Basis des \mathbb{R}^2 bildet.

- Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis B , d.h. berechnen Sie $\Phi_B^{-1}(v)$.
- Berechnen Sie $M_{(e_1, e_2)}^{(e_1, e_2)}(f)$ und $M_B^B(f)$.
- Bestimmen Sie $f(v)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$.
- Veranschaulichen Sie die zweite Rechnung aus (d) in einem (normalen) Koordinatensystem und interpretieren Sie die Abbildung f .

Lösung:

(a) Gesucht sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = v \stackrel{!}{=} \Phi_B((\lambda_1, \lambda_2)^t) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

Dies ist äquivalent zum LGS

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A:=} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\lambda:=} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{b:=}$$

Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ auf strenge Zeilenstufenform:

$$A|b = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} Z_1+Z_2 \rightarrow Z_2, (1/2)Z_2 \rightarrow Z_2 \\ -Z_2+Z_1 \rightarrow Z_1, -Z_1 \rightarrow Z_1 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \right)$$

$$\implies \text{Lös}(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\implies v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2$$

$$\implies \Phi_B^{-1}(v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

- (b) (i) Es gilt $f = \tilde{A}$ mit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Vorlesung liefert:

$$M_{(e_1, e_2)}^{(e_1, e_2)}(f) = A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- (ii) Es gilt:

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_B^{-1}(f(v_1)) & \Phi_B^{-1}(f(v_2)) \\ \hline & \end{array} \right).$$

Wir bestimmen also $f(v_i)$ und stellen diese wieder in der Basis $B = (v_1, v_2)$ dar:

$$\begin{aligned} f(v_1) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_1 + 0v_2 \\ f(v_2) &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0v_1 + 4v_2. \end{aligned}$$

Der allgemeine Ansatz zum Finden der Darstellung in v_1, v_2 wäre hier jeweils das Lösen eines LGS gewesen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \lambda'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Da hier die Lösungen aber einfach zu sehen waren, ist die Lösung eines LGS nicht notwendig.

Es folgt

$$M_B^B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

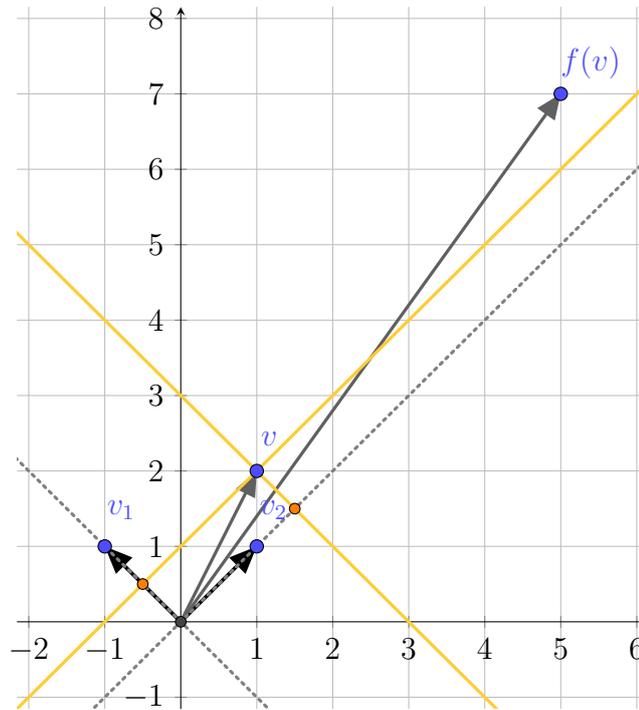
- (c) (i) Wir bestimmen $f(v)$ direkt:

$$f(v) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- (ii) Wir bestimmen $f(v)$ mittels der gegebenen Formel:

$$\begin{aligned} f(v) &= (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1})(v) = (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)})(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}) = \Phi_B(M_B^B(f) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}) = \Phi_B(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}) \\ &= 1 \cdot v_1 + 6 \cdot v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (d) In folgender Graphik sind v_1, v_2 und $v, f(v)$ eingetragen:



Durch f wird also die v_1 -Koordinate des Vektors v verdoppelt und die v_2 -Koordinate vervierfacht. In diesem Sinne ist f also nur eine Streckung in beide Koordinatenrichtungen im Koordinatensystem $B = (v_1, v_2)$.

Aufgabe P43 (Darstellungsmatrizen für Abbildungen zwischen Matrizenräumen).

Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wir definieren die Abbildung

$$f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \times M(2 \times 2, \mathbb{R}) \rightarrow M(2 \times 2, \mathbb{R}), X \mapsto AX - XA$$

zwischen den \mathbb{R} -Vektorräumen $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Weiter seien

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_4 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bildet $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ eine Basis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Weiter bezeichne $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die Standardbasis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

- (a) Geben Sie die Koordinaten von $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ bzgl. B an sowie die Matrix M' , welche durch die Koordinaten $(1, 2, 1, 2)^t$ bzgl. B beschrieben wird.
- (b) Berechnen Sie $M_B^B(f)$, $M_E^E(f)$ und $M_E^B(f)$.
- (c) Berechnen Sie $f(M)$ einmal direkt und einmal unter Verwendung von $M_B^B(f)$.
- (d) Es sei nun $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\text{Kern}(f)$ und $\text{Bild}(f)$ mit Hilfe von $M_E^E(f)$.

Lösung:

- (a) Wir suchen $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = M \stackrel{!}{=} \Phi_B \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} \right) = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \lambda_4 M_4 = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_2 - \lambda_4 & \lambda_1 - \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Vergleich der Einträge in der Matrix liefert 4 Gleichungen:

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 && + \lambda_3 \\ 1 &= &\lambda_2 &+ & \lambda_4 \\ 1 &= &\lambda_2 &- & \lambda_4 \\ 1 &= \lambda_1 && - \lambda_3 \end{aligned}$$

Wir lösen das LGS und erhalten

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{-Z1+Z4 \rightarrow Z4} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-Z2+Z3 \rightarrow Z3} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{(-1/2)Z3 \rightarrow Z3, (-1/2)Z4 \rightarrow Z4, Z3 \leftrightarrow Z4} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{-Z3+Z1 \rightarrow Z1, -Z4+Z2 \rightarrow Z2} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\implies M = M_1 + M_3 + M_4 = 1 \cdot M_1 + 1 \cdot M_2 + 0 \cdot M_3 + 0 \cdot M_4$$

Bemerkung: Hier hätten wir die Koordinaten aufgrund der einfachen Gestalt von M auch direkt angeben können.

\implies Die Koordinaten von M sind bzgl. der Basis B gegeben über

$$\Phi_B^{-1}(M) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ferner gilt

$$\Phi_B\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 + 1 \cdot M_3 + 2 \cdot M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) (i) Es gilt

$$M_B^B(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \Phi_B^{-1}(f(M_1)) & \Phi_B^{-1}(f(M_2)) & \Phi_B^{-1}(f(M_3)) & \Phi_B^{-1}(f(M_4)) \\ \hline & & & \end{array} \right)$$

Wir berechnen also $f(M_i)$ und stellen das Ergebnis in der Basis $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ dar:

$$\begin{aligned} f(M_1) &= A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - A = 0, \\ f(M_2) &= A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix} = (b-c)M_3 + (a-d)M_4 \\ f(M_3) &= A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-b) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_2+M_4} + c \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=M_2-M_4} = (c-b)M_2 + (-b-c)M_4, \\ f(M_4) &= A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ -a & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b-c & a-d \\ a-d & c+b \end{pmatrix} \\ &= (-b-c)M_3 + (a-d)M_2. \end{aligned}$$

Es folgt:

$$\implies M_B^B(f) = = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (c-b) & (a-d) \\ 0 & (b-c) & 0 & (-b-c) \\ 0 & (a-d) & (-b-c) & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Wie zuvor:

$$\begin{aligned} f(E_{11}) &= A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = (-b)E_{12} + cE_{21}, \\ f(E_{12}) &= A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = (-c)E_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22}, \\ f(E_{21}) &= A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & b \end{pmatrix} = bE_{11} + (d-a)E_{21} + (-b)E_{22}, \\ f(E_{22}) &= A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = bE_{12} + (-c)E_{21}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Definition von $M_E^E(f)$:

$$M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & (a-d) & 0 & b \\ c & 0 & (d-a) & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) Wie zuvor:

$$\begin{aligned} f(M_1) &= 0, \\ f(M_2) &= \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix} = (b-c)E_{11} + (a-d)E_{12} + (d-a)E_{21} + (c-b)E_{22}, \\ f(M_3) &= \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} = -2bE_{12} + 2cE_{21}, \\ f(M_4) &= \begin{pmatrix} -b-c & a-d \\ -d+a & c+b \end{pmatrix} = (-b-c)E_{11} + (a-d)E_{12} + (-d-a)E_{21} + (c+b)E_{22}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Definition von $M_E^B(f)$:

$$M_E^B(f) = \begin{pmatrix} 0 & (b-c) & 0 & (-b-c) \\ 0 & (a-d) & -2b & (a-d) \\ 0 & (d-a) & 2c & (-d-a) \\ 0 & (c-b) & 0 & (c+b) \end{pmatrix}$$

(c) (i) Wir berechnen $f(M)$ direkt:

$$f(M) = A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix}$$

(ii) Wir berechnen $f(M)$ mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$:

$$\begin{aligned} f(M) &= (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1})(M) \stackrel{(a)}{=} (\Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)})\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \Phi_B\left(M_B^B(f)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \Phi_B\left(\begin{pmatrix} 0 \\ b-c \\ 0 \\ a-d \end{pmatrix}\right) = (b-c)M_3 + (a-d)M_4 = \begin{pmatrix} b-c & a-d \\ d-a & c-b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Wir berechnen den Kern und das Bild von f anhand der Koordinatenmatrix $M_E^E(f)$.

(i) Aufgabe P44 (a) liefert:

$$\text{Kern}(f) = \Phi_E(\text{Kern}(\widetilde{M_E^E(f)})) = \Phi_E(\text{Lös}(M_E^E(f), 0)).$$

Es ist also $\text{Lös}(M_E^E(f), 0)$ zu bestimmen. Wir bringen die Matrix $M_E^E(f)$ in strenge Zeilenstufenform:

$$\begin{aligned}
 M_E^E(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow[Z1 \leftrightarrow Z3]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow[Z1+Z2 \rightarrow Z2]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow[Z2+Z3 \rightarrow Z23, -Z2+Z4 \rightarrow Z4]{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: Z
 \end{aligned}$$

Die Position der Pivotelemente ist gegeben über $(j_1, j_2) = (1, 2)$. Sei F die Matrix, welche durch Streichen der Spalte j_1, j_2 und aller Nullzeilen von Z hervorgeht, d.h.

$$F = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine Basis von $\text{Lös}(M_E^E(f), 0)$ ist dann gegeben durch (w_1, w_2) , wobei

- $(w_{1j_1}, w_{1j_2}) = (w_{11}, w_{12}) = 1$. Spalte von $-F$ und $(w_{13}, w_{14}) = e_1 \in \mathbb{R}^2$,
- $(w_{2j_1}, w_{2j_2}) = (w_{21}, w_{22}) = 1$. Spalte von $-F$ und $(w_{23}, w_{24}) = e_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$\implies \text{Lös}(M_E^E(f), 0) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \text{Lin}(w_1, w_2)$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \text{Kern}(f) &= \Phi_E(\text{Lös}(M_E^E(f), 0)) = \Phi_E(\text{Lin}(w_1, w_2)) \\
 &= \text{Lin}(\Phi_E(w_1), \Phi_E(w_2)) = \text{Lin}(E_{11} + E_{12} + E_{21}, E_{11} + E_{22}) \\
 &= \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)
 \end{aligned}$$

$$\implies \dim_{\mathbb{R}} \text{Kern}(f) = 2$$

(ii) Bestimme $\text{Bild}(f)$:

Wir nutzen Aufgabe P44 (b) aus: $\text{Bild}(f) = \Phi_B(\widetilde{\text{Bild}(M_B^B(f))})$.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \text{Bild}(\widetilde{M_E^E(f)}) &= \widetilde{M_E^E(f)}(\mathbb{R}^4) = \text{Spaltenraum}(M_E^E(f)) \\
 &= \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \text{Bild}(f) &= \Phi_E(\text{Bild}(\widetilde{M_E^E(f)})) = \Phi_E(\text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)) \\
 &= \text{Lin}\left(\Phi_E\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \Phi_E\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right) = \text{Lin}(E_{21} - E_{12}, E_{12} + E_{22} - E_{11}) \\
 &= \text{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).
 \end{aligned}$$

$$\implies \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(f)) = 2$$

Aufgabe P44 (Darstellungsmatrizen als Hilfsmittel zur Bestimmung von Kern und Bild linearer Abbildungen).

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K . Sei B eine Basis von V und C eine Basis von W . Sei $f : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

- (a) $\text{Kern}(f) = \Phi_B(\text{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)}))$,
- (b) $\text{Bild}(f) = \Phi_C(\text{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.
- (c) $\dim_K \text{Kern}(f) = \dim_K \text{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)})$.
- (d) $\dim_K \text{Bild}(f) = \dim_K \text{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)})$.

Lösung:

Laut Vorlesung gilt die Gleichheit $f = \Phi_C \circ \widetilde{M_C^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$.

- (a) Es gilt:

$$\begin{aligned} v \in \text{Kern}(f) & \\ \iff f(v) = 0 & \\ \iff \Phi_C(\widetilde{M_C^B(f)}(\Phi_B^{-1}(v))) = 0 & \\ \overset{\Phi_C^{-1}(0)=0}{\iff} \widetilde{M_C^B(f)}(\Phi_B^{-1}(v)) = 0 & \\ \iff \Phi_B^{-1}(v) \in \text{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)}) & \\ \overset{(*)}{\iff} v \in \Phi_B(\text{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)})). & \end{aligned}$$

(*) gilt nur, da Φ_B bijektiv ist. Wir zeigen (mit einfacherer Notation, $g : X \rightarrow Y$ bijektiv, $A \subset X$): $g^{-1}(y) \in A \iff y \in g(A)$
 \implies : $g^{-1}(y) \in A \implies$ Es gibt $x \in A$ mit $g^{-1}(y) = x \implies y = g(g^{-1}(y)) = g(x) \in g(A)$.
 \impliedby : $y \in g(A) \implies$ Es gibt $x \in A$ mit $y = g(x) \implies g^{-1}(y) = g^{-1}(g(x)) \stackrel{g \text{ bij.}}{=} x \in A$.

- (b) Es gilt:

$$\begin{aligned} w \in \text{Bild}(f) & \\ \iff w \in f(V) & \\ \iff w \in \Phi_C(\widetilde{M_C^B(f)}(\Phi_B^{-1}(V))) & \\ \overset{\Phi_B: K^n \rightarrow V \text{ bijektiv}}{\iff} w \in \Phi_C(\widetilde{M_C^B(f)}(K^n)) & \\ \iff w \in \Phi_C(\text{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)})). & \end{aligned}$$

- (c) Man braucht nur eine Begründung, warum der Isomorphismus Φ_B bei der Dimensionsberechnung weggelassen werden kann.

Schreibe kurz $A := \text{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)})$. Betrachte die Einschränkung $\Phi_B|_A : A \rightarrow \Phi_B(A)$.

Φ_B Isomorphismus $\implies \Phi_B|_A$ ist linear und injektiv. \implies

$$\dim_K \Phi_B(A) = \dim_K \text{Bild}(\Phi_B|_A) \stackrel{\text{Dim.-Formel lin. Abb.}}{=} \dim_K(A) - \underbrace{\dim_K \text{Kern}(\Phi_B|_A)}_{\substack{\Phi_B|_A \text{ injektiv} \\ \{0\}}} = \dim_K(A).$$

Mit (a) folgt:

$$\dim_K(\text{Kern}(f)) \stackrel{(a)}{=} \dim_K(\Phi_B(A)) = \dim_K(A).$$

- (d) Analog zu (c).

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:

<https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html>