Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

11. Präsenzblatt

Aufgabe P41 (Darstellungsmatrix für Abbildungen zwischen Polynomräumen).
Für $D \in \mathbb{N}$ betrachten wir den Vektorraum der Polynome

$$P_D = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \exists a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}$$

über $\mathbb{R}$. Für $i = 0, ..., D$ sei $p_i \in P_D$ mit $p_i(x) := x^i$. Es ist bekannt, dass $B_D = (p_0, ..., p_D)$ eine Basis von P_D bildet. Gegeben seien die beiden linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} f : P_3 \to P_2, \qquad & p \mapsto [x \mapsto (x+1) \cdot p'(x) - 3p(x)], \\ g : P_2 \to P_2, \qquad & p \mapsto [x \mapsto p(x) \cdot (x+1) - p(x+1) \cdot x]. \end{aligned}$$

(a) Geben Sie Φ_{B_3} und $\Phi_{B_3}^{-1}$ an.

(b) Sei $p \in P_3$ definiert durch $p(x) = 2x^3 - 3x + 2$. Geben Sie die Koordinaten von p bzgl. B_3 an, d.h. bestimmen Sie $\Phi_{B_3}^{-1}(p)$.

(c) Bestimmen Sie $M_{B_2}^{B_3}(f)$ und $M_{B_2}^{B_2}(g)$.

(d) Berechnen Sie $f(p)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_{B_2} \circ \widetilde{M_{B_2}^{B_3}(f)} \circ \Phi_{B_3}^{-1}$.

(e) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}\text{Kern}(f)$ und $\text{Kern}(f)$ mittels Aufgabe P44.

(f) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}\text{Bild}(g)$ und $\text{Bild}(g)$ mittels Aufgabe P44.

Aufgabe P42 (Darstellungsmatrizen in $\mathbb{R}^2$).
Wir betrachten die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x.$$

zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $\mathbb{R}^2$. Gegeben seien weiter die beiden Vektoren

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sodass $B = (v_1, v_2)$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ bildet.

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor von $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bzgl. der Basis B, d.h. berechnen Sie $\Phi_B^{-1}(v)$.

(b) Berechnen Sie $M_{(e_1,e_2)}^{(e_1,e_2)}(f)$ und $M_B^B(f)$.

(c) Bestimmen Sie $f(v)$ einmal direkt und einmal mittels $f = \Phi_B \circ \widetilde{M_B^B(f)} \circ \Phi_B^{-1}$.

(d) Veranschaulichen Sie die zweite Rechnung aus (d) in einem (normalen) Koordinatensystem und interpretieren Sie die Abbildung f.

Aufgabe P43 (Darstellungsmatrizen für Abbildungen zwischen Matrizenräumen).
Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Wir definieren die Abbildung

$$f : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \times M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}),\ X \mapsto AX - XA$$

zwischen den $\mathbb{R}$-Vektorräumen $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Weiter seien

$$M_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad M_2 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad M_3 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \quad M_4 := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Dann bildet $B = (M_1, M_2, M_3, M_4)$ eine Basis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$. Weiter bezeichne $E = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ die Standardbasis von $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

(a) Geben Sie die Koordinaten von $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bzgl. B an sowie die Matrix M', welche durch die Koordinaten $(1, 2, 1, 2)^t$ bzgl. B beschrieben wird.

(b) Berechnen Sie $M_B^B(f)$, $M_E^E(f)$ und $M_E^B(f)$.

(c) Berechnen Sie $f(M)$ einmal direkt und einmal unter Verwendung von $M_B^B(f)$.

(d) Es sei nun $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie Kern$(f)$ und Bild(f) mit Hilfe von $M_E^E(f)$.

Aufgabe P44 (Darstellungsmatrizen als Hilfsmittel zur Bestimmung von Kern und Bild linearer Abbildungen).
Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Sei B eine Basis von V und C eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Kern}(f) = \Phi_B(\mathrm{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)}))$,

(b) $\mathrm{Bild}(f) = \Phi_C(\mathrm{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

(c) $\dim_K \mathrm{Kern}(f) = \dim_K \mathrm{Kern}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

(d) $\dim_K \mathrm{Bild}(f) = \dim_K \mathrm{Bild}(\widetilde{M_C^B(f)}))$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`