10. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P37 (Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus).
Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad b := \begin{pmatrix} y \\ 4 \\ -y \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ in Abhängigkeit von x und y.

Lösung:
Wir lösen das LGS $Ax = b$ für $x = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$. Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ auf strenge Zeilenstufenform:

$$A|b = \left(\begin{array}{ccc|c} x & 1 & -1 & y \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -y \end{array}\right) \overset{Z1 \leftrightarrow Z3, x \cdot Z1 + Z3 \to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & -y \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1-x & -1 & y(1-x) \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)Z1 \to Z1, (1/2)Z2 \to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1-x & -1 & y(1-x) \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1)Z2 + Z1 \to Z1, (x-1)Z2 + Z3 \to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -x & (1-x)(y-2) \end{array}\right) =: A'|b'$$

(i) Fall $x = 0$:

$$A'|b' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & y-2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & y-2 \end{array}\right)$$

- Fall $y \neq 2$:
  $\implies$ $\text{Zeilenrang}(A') = 2 \neq 3 = \text{Zeilenrang}(A'|b')$
  $\implies$ $\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(A', b') = \emptyset$ nach Satz 10.5.
- Fall $y = 2$:

$$A'|b' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\implies$ $\text{Zeilenrang}(A') = 2 = \text{Zeilenrang}(A'|b')$
Es existieren Lösungen.
Algorithmus zur Lösung inhomogener LGS: Hier ist $r = 2$, die Position der Pivotelemente $\{j_1, j_2\} = \{1, 2\}$. Eine spezielle Lösung ist daher gegeben durch $v_{j_i} = b'_i$

$(i = 1, 2)$, wobei der Rest von v mit Nullen aufgefüllt wird. Eine spezielle Lösung ist also:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei B die Matrix, welche aus A' durch Streichen der Spalten j_1, j_2 und aller Nullzeilen hervorgeht:

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis von $\mathrm{Lös}(A', 0)$ ist dann gegeben durch $w = (w_1, w_2, w_3)^t \in \mathbb{R}^3$, wobei

$$(w_{j_1}, w_{j_2}) = (w_1, w_2) = 1.\text{ Spalte von } -B \text{ und } (w_3) = e_1 = (1) \in \mathbb{R},$$

d.h.

$$w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen von $Ax = b$ sind also gegeben durch den 1–dimensionalen affinen Unterraum

$$\mathrm{Lös}(A|b) = \mathrm{Lös}(A'|b') = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(ii) Fall $x \neq 0$:

$$A'|b' \overset{(-1/x)Z3 \to Z3, Z3+Z2 \to Z2, (-1)Z3+Z1 \to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y - 2 - \frac{x-1}{x}(y-2) \\ 0 & 1 & 0 & 2 + \frac{x-1}{x}(y-2) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{x-1}{x}(y-2) \end{array} \right) =: A^*|b^*$$

$\implies$ Zeilenrang$(A'|b') = 3 =$ Zeilenrang$(A^*|b^*)$
$\implies$ Die Lösung ist eindeutig bestimmt durch

$$\mathrm{Lös}(A|b) = \mathrm{Lös}(A'|b') = \mathrm{Lös}(A^*|b^*) = \left\{ \frac{1}{x} \begin{pmatrix} y-2 \\ 2 + xy - y \\ (x-1)(y-2) \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe P38 (Bestimmung inverser Matrizen).

Das folgende Vorgehen ist eine Standardmethode zur Bestimmung der Inversen A^{-1} einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$:

Algorithmus
Falls A mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n überführt werden kann, so ist A invertierbar und dieselben Zeilenumformungen angewandt auf E_n liefern die inverse Matrix A^{-1}.
Begründung: Laut Voraussetzung liefern elementare Zeilenumformungen eine Matrix $S \in GL(n, K)$ *mit* $S \cdot A = E_n$. *Es folgt direkt* $A \cdot S = (S^{-1}S)AS = S^{-1}(SA)S = S^{-1}E_nS = E_n$, *d.h.* A *ist invertierbar. Wegen* $S \cdot E_n = A^{-1}$ *folgt die angegebene Berechnungsformel von* A^{-1}.

Entscheiden Sie bei folgenden Matrizen jeweils, ob diese über den angegebenen Körpern invertierbar sind und bestimmen Sie im Falle der Existenz die Inversen:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, \mathbb{Q})$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{Q}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3\times 3, F_5)$,

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Lösung:

(a) Wir wenden den beschriebenen Algorithmus an. Schreibe dazu die zu invertierende Matrix mit der Einheitsmatrix E_3 wie folgt auf und wende dieselben elementaren Zeilenumformungen auf beide Matrizen gleichzeitig an, bis auf der linken Seite E_3 steht:

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{=:A_1|E_3} \overset{(-3)Z1+2(Z2)\to Z2, (-x)Z1+2Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 2-x & 4-x & -x & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\overset{(-(2-x))Z2+Z3\to Z3,}{\rightsquigarrow} \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6-2x & 6-4x & 2x-4 & 2 \end{array}\right)}_{=:A_1'|B}$$

- Fall $x = 3$: Zeilenrang(A_1) = Zeilenrang$(A_1') = 2 < 3$.
  $\overset{\text{Aufgabe 28 (b)(ii)}}{\Longrightarrow}$ A_1 ist nicht invertierbar.

- Fall $x \neq 3$: Forme weiter um:

$$A_1'|B \overset{((1/(6-2x)))Z3\to Z3,}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

$$\overset{Z3+Z2\to Z2, Z3+(-1)Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & 0 & \frac{-x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-6}{3-x} & \frac{4-x}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

$$\overset{Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & \frac{-6}{3-x} & \frac{2}{3-x} & \frac{2}{3-x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-6}{3-x} & \frac{4-x}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

$$\overset{(-1/2)Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3-x} & \frac{-1}{3-x} & \frac{-1}{3-x} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{x-6}{3-x} & \frac{4-x}{3-x} & \frac{1}{3-x} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3-2x}{3-x} & \frac{x-2}{3-x} & \frac{1}{3-x} \end{array}\right)$$

Damit lautet die Inverse:

$$A_1^{-1} = \frac{1}{3-x} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ x-6 & 4-x & 1 \\ 3-2x & x-2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Unsere Ausgangsmatrix sieht in F_5 wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir gehen vor wie in Teilaufgabe (a). Alle Rechnenoperation sind bereits dem Körper F_5 angepasst.

$$A_2|E_3 := \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2Z1+Z2\to Z2, 3Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{3Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{4Z3+Z1\to Z1, 2Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

Damit lautet die Inverse:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Wir wenden wieder den beschriebenen Algorithmus an. Schreibe dazu die zu invertierende Matrix mit der Einheitsmatrix E_2 wie folgt auf und wende dieselben elementaren Zeilenumformungen auf beide Matrizen gleichzeitig an, bis auf der linken Seite E_2 steht:

$$A_3|E_2 := \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Fall 1: $a = c = 0$, so ist offensichtlich Zeilenrang$(A_3) = 1 < 2$.
Aufgabe 28(b)(ii) $\Rightarrow$ A_3 nicht invertierbar.
Fall 2: $a \neq 0$ oder $c \neq 0$.
OBdA. sei im Folgenden $a \neq 0$. Dann ist:

$$A_3|E_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{a\cdot Z2\to Z2, (-c)Z1+Z2\to Z2}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right) =: A_3'|B$$

- Fall 2.1.: $ad - bc = 0$: Zeilenrang$(A_3) =$ Zeilenrang$(A_3') = 1 < 2$
  Aufgabe 28 (b)(ii) $\Longrightarrow$ A_3 nicht invertierbar.
- Fall 2.2.: $ad - bc \neq 0$: Wir formen weiter um:

$$A_3'|B \overset{(1/(ad-bc))Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\overset{(-b)Z2+Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & \frac{ad}{ad-bc} & \frac{-ab}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right)$$

$$\overset{(1/a)Z1\to Z1}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{a}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array}\right).$$

Damit gilt:

$$A_3^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Zusammenfassung: Der Fall 1 ($a = c = 0$) ist im Fall 2.1 ($ad - bc = 0$) enthalten. Daher gibt es tatsächlich nur folgende zwei Fälle:

- Fall $ad - bc = 0$: Die Matrix A_3 ist nicht invertierbar.
- Fall $ad - bc \neq 0$: A_3 ist invertierbar mit $A_3^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Aufgabe P39 (Nachweise mit affinen Unterräumen).

Sei V ein K-Vektorraum und X, Y affine Unterräume von V. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Entweder $X \cap Y = \emptyset$ oder $X \cap Y$ ist wieder ein affiner Unterraum von V.

(b) $X \cup Y$ ist wieder ein affiner Unterraum von V.

(c) Jeder Untervektorraum U von V ist ein affiner Unterraum.

Lösung:

(a) Die Aussage ist wahr.
Es gelte $X \cap Y \neq \emptyset$. Wir zeigen nun, dass $X \cap Y$ affiner Unterraum von V ist.
$X \cap Y \neq \emptyset \Rightarrow$ Es gibt $v \in X \cap Y \Rightarrow v \in X$ und $v \in Y$. (*)
X, Y affiner Unterräume, (*) $\Rightarrow$ Es gibt UVR $U_1, U_2 \subset V$ mit $X = v + U_1$, $Y = v + U_2$.
Wir zeigen: $X \cap Y = v + U_1 \cap U_2$ (damit ist $X \cap Y$ affiner Unterraum, da $U_1 \cap U_2$ UVR von V).

- „$\subset$": Sei $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$, $x \in Y$
  $\Rightarrow$ Es gibt $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $x = v + u_1 = v + u_2$.
  $\Rightarrow U_1 \ni u_1 = u_2 \in U_2 \Rightarrow u_1 \in U_1 \cap U_2$
  $\Rightarrow x = v + u_1 \in v + U_1 \cap U_2$.
- „$\supset$": Sei $x \in v + U_1 \cap U_2$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $u \in U_1 \cap U_2$ mit $x = v + u$
  $\Rightarrow x \in v + U_1 = X$, $x \in v + U_2 = Y \Rightarrow x \in X \cap Y$.

(b) Die Aussage ist falsch.
Wähle $V = \mathbb{R}^2$ über $K = \mathbb{R}$, $X = \mathrm{Lin}((1,0))$ und $Y = \mathrm{Lin}((0,1))$.
Dann sind X, Y als Untervektorräume auch affine Unterräume.
Aber $X \cup Y$ ist kein affiner Unterraum, denn:
Angenommen, $X \cup Y$ ist affiner Unterraum. $(1,0) \in X \cup Y \Rightarrow$ Es gibt UVR $U \subset V$ mit $X \cup Y = (1,0) + U$.
$(0,1), (2,0) \in X \cup Y \Rightarrow$ Es gibt $u_1, u_2 \in U$ mit $(0,1) = (1,0) + u_1$ und $(2,0) = (1,0) + u_2$
$\Rightarrow (-1,1) = u_1, (1,0) = u_2 \in U$.
$\overset{U \text{ UVR}}{\Rightarrow} (0,1) = u_1 + u_2 \in U$
$\Rightarrow (1,1) = (1,0) + (0,1) \in (1,0) + U = X \cup Y$, Widerspruch!

(c) Die Aussage ist wahr.
Es gilt nämlich $U = 0 + U$ mit $0 \in V$ dem Nullvektor.

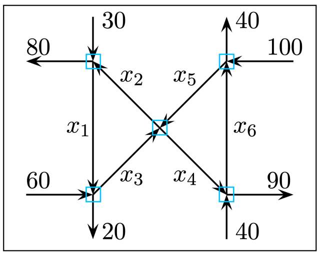
Aufgabe P40 (Lineare Gleichungssyteme und Verkehrsströme).

Wir betrachten den motorisierten Straßenverkehr und dessen Verkehrsströme an fünf Kreuzungen (in der unteren Abbildung durch blaue Quadrate markiert). Fahrzeuge, die in eine Kreuzung hineinfahren, werden an der Kreuzung als postiver Zufluss bewertet. Fahrzeuge, welche die Kreuzung verlassen, entsprechend als negativer Zufluss.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssytem (LGS) für die Verkehrsströme $x_1, ..., x_6 \in \mathbb{R}$ im angegebenen Streckennetz (s. Abbildung) auf.

(b) Ermitteln Sie die möglichen Verkehrsströme in den Teilstücken $x_1, ..., x_6$, indem Sie die Lösungsmenge des LGS aus (a) bestimmen.

(c) Schreiben Sie den in (b) ermittelten Lösungsraum in der Form $v + U$ mit $v \in V$, $U \subset V$ UVR. Interpretieren Sie den Lösungsraum hinsichtlich der anschaulichen Bedeutung: Welche Veränderungen der Lösung v sind durch Addition von Elementen aus U nur möglich?



Lösung:

(a) Wir betrachten exemplarisch die Bewertung von Zu– und Abfahrt an der Kreuzung oben links und in der Mitte:

- Für die Kreuzung oben links erhalte: Die Zufahrt wird mit $x_2 + 30$ und die Abfahrt mit $-80 - x_1$ bewertet.
  Insgesamt gilt daher $0 = x_2 + 30 - 80 - x_1$.
- Für die Kreuzung in der Mitte erhalte: Die Zufahrt wird mit $x_3 + x_5$ und die Abfahrt mit $-x_4 - x_2$ bewertet.
  Insgesamt gilt daher $0 = x_3 + x_5 - x_4 - x_2$.

Analoge Betrachtung ergibt für die Kreuzung unten links, oben rechts und unten rechts:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & = & x_1 & + & 60 & - & 20 & - & x_3 \\ 0 & = & x_6 & + & 100 & - & 40 & - & x_5 \\ 0 & = & x_4 & + & 40 & - & 90 & - & x_6 \end{array}$$

Damit erhalten wir folgendes LGS:

$$Ax := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -50 \\ 0 \\ -40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} =: b$$

(b) Zur Lösung des LGS bringen wir $A|b$ nun in strenge Zeilenstufenform:

$$
\begin{aligned}
A|b &= \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z1+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \end{array}\right) \\
&\overset{Z2+Z1\to Z1,(-1)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -50 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z3\to Z_3,(-1)Z3+Z1\to Z1,(-1)Z3+Z2\to Z2,(-1)Z3+Z5\to Z5}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \end{array}\right) \\
&\overset{(-1)Z4+Z5\to Z5}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\
&\overset{Z4+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \underbrace{\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -40 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 60 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}_{=:A'|z}
\end{aligned}
$$

Algorithmus zur Lösung inhomogener LGS: Hier ist $r = 4$, die Position der Pivot-Elemente entspricht $(j_1, j_2, j_3, j_4) = (1, 2, 4, 5)$.
Eine spezielle Lösung ist daher gegeben durch $v_{j_i} = z_i$, $(i = 1, 2, 3, 4)$, wobei der Rest von v aus Nullen besteht:

$$v = \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \\ 0 \\ 50 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sei B die Matrix, welche aus A' durch Streichen der Spalten j_1, j_2, j_3, j_4 und der Nullzeilen hervorgeht:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eine Basis von $\text{Lös}(A, 0)$ ist dann durch (w_1, w_2), wobei

- $(w_{1j_1}, w_{1j_2}, w_{1j_3}, w_{1j_4}) = (w_{11}, w_{12}, w_{14}, w_{15}) =$ 1. Spalte von $-B$ und $(w_{13}, w_{16}) = e_1 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, und
- $(w_{2j_1}, w_{2j_2}, w_{2j_3}, w_{2j_4}) = (w_{21}, w_{22}, w_{24}, w_{25}) =$ 2. Spalte von $-B$ und $(w_{23}, w_{26}) = e_2 = (0, 1) \in \mathbb{R}^2$,

d.h.

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alle Lösungen von $Ax = b$ sind daher gegeben durch den 2-dimensionalen affinen Unterraum

$$\text{Lös}(A, z) = v + \text{Lös}(A, 0) = \{v + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Entsprechend der Darstellung aus (b) gilt:

$$\text{Lös}(A, z) = v + \underbrace{\text{Lös}(A, 0)}_{=:U} = v + \{\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 | \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Die Elemente aus U können nur die Verkehrsströme x_1, x_2, x_3 oder x_4, x_5, x_6 gleichzeitig um dieselbe Menge erhöhen/verringern. Dies bedeutet anschaulich, dass die Menge der Fahrzeuge, welche *durch* die mittlere Kreuzung fahren, festgelegt ist und durch die durch U zusätzlich entstehenden Lösungen nicht verändert wird.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`