Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

10. Präsenzblatt

Aufgabe P37 (Lösen linearer Gleichungssysteme mit dem Gauß-Algorithmus).
Für $x, y \in \mathbb{R}$ seien

$$A := \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}), \quad b := \begin{pmatrix} y \\ 4 \\ -y \end{pmatrix} \in M(3 \times 1, \mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie $\text{Lös}(A, b)$ in Abhängigkeit von x und y.

Aufgabe P38 (Bestimmung inverser Matrizen).
Das folgende Vorgehen ist eine Standardmethode zur Bestimmung der Inversen A^{-1} einer Matrix $A \in M(n \times n, K)$:

Algorithmus
Falls A mittels elementarer Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix E_n überführt werden kann, so ist A invertierbar und dieselben Zeilenumformungen angewandt auf E_n liefern die inverse Matrix A^{-1}.
Begründung: Laut Voraussetzung liefern elementare Zeilenumformungen eine Matrix $S \in GL(n, K)$ mit $S \cdot A = E_n$. Es folgt direkt $A \cdot S = (S^{-1}S)AS = S^{-1}(SA)S = S^{-1}E_nS = E_n$, d.h. A ist invertierbar. Wegen $S \cdot E_n = A^{-1}$ folgt die angegebene Berechnungsformel von A^{-1}.

Entscheiden Sie bei folgenden Matrizen jeweils, ob diese über den angegebenen Körpern invertierbar sind und bestimmen Sie im Falle der Existenz die Inversen:

(a) $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$ in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{Q}$,

(b) $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, F_5)$,

(c) $A_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Aufgabe P39 (Nachweise mit affinen Unterräumen).
Sei V ein K-Vektorraum und X, Y affine Unterräume von V. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Entweder $X \cap Y = \emptyset$ oder $X \cap Y$ ist wieder ein affiner Unterraum von V.

(b) $X \cup Y$ ist wieder ein affiner Unterraum von V.

(c) Jeder Untervektorraum U von V ist ein affiner Unterraum.

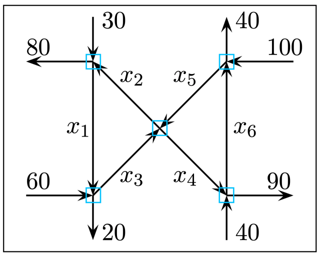
Aufgabe P40 (Lineare Gleichungssyteme und Verkehrsströme).

Wir betrachten den motorisierten Straßenverkehr und dessen Verkehrsströme an fünf Kreuzungen (in der unteren Abbildung durch blaue Quadrate markiert). Fahrzeuge, die in eine Kreuzung hineinfahren, werden an der Kreuzung als postiver Zufluss bewertet. Fahrzeuge, welche die Kreuzung verlassen, entsprechend als negativer Zufluss.

(a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssytem (LGS) für die Verkehrsströme $x_1, ..., x_6 \in \mathbb{R}$ im angegebenen Streckennetz (s. Abbildung) auf.

(b) Ermitteln Sie die möglichen Verkehrsströme in den Teilstücken $x_1, ..., x_6$, indem Sie die Lösungsmenge des LGS aus (a) bestimmen.

(c) Schreiben Sie den in (b) ermittelten Lösungsraum in der Form $v + U$ mit $v \in V$, $U \subset V$ UVR. Interpretieren Sie den Lösungsraum hinsichtlich der anschaulichen Bedeutung: Welche Veränderungen der Lösung v sind durch Addition von Elementen aus U nur möglich?



Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`