**Lineare Algebra 1**
**Prof. Dr. R. Dahlhaus**
**Dr. S. Richter, N. Phandoidaen**
**Wintersemester 2018/2019**

# 9. Präsenzblatt – Lösungen

**Aufgabe P33 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des $K^n$).**
Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir definieren die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch $\varphi(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ (vgl. Aufgabe P31 (a)).

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ und geben Sie $\text{Rang}(\varphi)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\varphi))$.

(c) Zeigen Sie (ohne (d) zu benutzen) die Isomorphie $U := \text{Bild}(\varphi) \cong \mathbb{R}^3$ von Vektorräumen.

(d) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_3 - x_1 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 \\ 2x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus ist.
*Hinweis: Berechnen Sie zunächst Kern($f$) mittels P36(a).*

(e) Definieren Sie einen weiteren Isomorphismus $g : U \to \mathbb{R}^3$ mit $g \neq f$.

**Lösung:**

(a) Bestimme eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$: Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(\varphi) &= \varphi(\mathbb{R}^4) \overset{(v_1,...,v_4)\text{ Basis von }\mathbb{R}^4}{=} \varphi(\text{Lin}(v_1, ..., v_4)) \\ &\overset{\text{Eig. lin. Abb.}}{=} \text{Lin}(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_4)) = \text{Lin}(w_1, ..., w_4). \end{aligned}$$

Es genügt also, eine Basis von $\text{Lin}(w_1, ..., w_4)$ zu bestimmen. Dies machen wir wie üblich mit dem Gauß-Algorithmus (schreibe $w_1, ..., w_4$ als Zeilen in Matrix und bringe diese auf Zeilenstufenform):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z1+Z2\to Z2,(-1)Z1+Z3\to Z3,(-1)Z1+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)Z2+Z3\to Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-1)Z3+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\implies$ Eine Basis von $\mathrm{Bild}(\varphi)$ ist

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

$\implies \mathrm{Rang}(\varphi) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Bild}(\varphi)) = 3$

(b) Mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen (Satz 9.13)

$$\implies \qquad \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Kern}(\varphi)) = \dim_{\mathbb{R}}(V) - \mathrm{Rang}(\varphi) = 4 - 3 = 1.$$

(c) Es gilt $\dim_{\mathbb{R}}(U) \overset{(a)}{=} 3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) \overset{\text{Kor. 9.14}}{\implies} U \cong \mathbb{R}^3$.

(d) Wir nutzen P36(a). Das heißt, wir bestimmen $\mathrm{Kern}(F)$ von

$$F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_3 - x_1 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 \\ 2x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

und nutzen dann $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(F) \cap U$.

- Bestimmung von Kern$(F)$: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
F(x) = 0 \qquad &\iff \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \\
&\overset{Z_1+Z_2\to Z2}{\iff} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \\
&\overset{Z_2+Z_3\to Z3}{\iff} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

  $\overset{\text{3. Zeile}}{\Longrightarrow} x_4 = 0 \overset{\text{2. Zeile}}{\Longrightarrow} x_3 = 0 \overset{\text{1. Zeile}}{\Longrightarrow} x_1 = 0.$
  Wir haben gezeigt:

$$\mathrm{Kern}(F) \subset \mathrm{Lin}(v_1), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

  Die Richtung „$\supset$“ ist offensichtlich (es gilt $F(v_1) = 0$ und damit $F(\mathrm{Lin}(v_1)) = \mathrm{Lin}(F(v_1)) = 0$).
  $\Rightarrow \mathrm{Kern}(F) = \mathrm{Lin}(v_1)$.

- Bestimmung von Kern$(f) = $ Kern$(F) \cap U$:
  (*Standardmethode: Löse Gleichungssystem zur Bestimmung des Schnitts zweier UVR, vgl. A18(c)) - die hier benutzte Methode geht i.A. schneller und läuft auf dasselbe hinaus.*
  Seien $(u_1, u_2, u_3)$ die Basisvektoren von $U$ (vgl. (a)) und $v_1$ die von Kern$(F)$.
  $\Rightarrow (u_1, u_2, u_3, v_1)$ sind linear unabhängig, denn (Gauß-Algorithmus):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-Z_2+Z4\to Z4}{\iff} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  ist in Zeilenstufenform (keine Nullzeilen).
  $\Rightarrow (u_1, u_2, u_3, v_1)$ ist Basis von $\mathbb{R}^4$
  $\overset{\text{Charakt. direkte Summe}}{\Rightarrow} \mathbb{R}^4 = U \oplus \mathrm{Kern}(F)$
  $\overset{\text{Def. direkte Summe}}{\Rightarrow} U \cap \mathrm{Kern}(F) = \{0\}$.

$\Longrightarrow$ Kern$(f) = \{0\} \Longrightarrow f$ ist injektiv.

$\overset{\dim_{\mathbb{R}}(U)=\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)=3<\infty}{\Longrightarrow} f$ ist bijektiv, also ein Isomorphismus, nach Korollar 9.16.

(e) Sei $(u_1, u_2, u_3)$ die in (a) ermittelte Basis von $U$.
P31(a) $\Rightarrow$ Es gibt eindeutig bestimmte lineare Abbildung $g : U \to \mathbb{R}^3$ mit

$$g(u_i) = e_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Da $g$ Basen auf Basen abbildet, ist $g$ ein Isormorphismus.
(*Langversion, nicht verlangt:*
$Bild(g) = g(Lin((u_1, u_2, u_3))) = Lin((g(u_1), g(u_2), g(u_3))) = Lin((e_1, e_2, e_3)) = \mathbb{R}^3$
$\Rightarrow g$ *surjektiv* $\overset{dim_{\mathbb{R}}(U)=3=dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)}{\Rightarrow}$ $g$ *Isomorphismus.* )
Es bleibt zu zeigen, dass $g \neq f$.
Es gilt

$$g(u_1) = g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

aber

$$f(u_1) = f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(*Hätte man mit obiger Definition von $g$ zufällig genau $f$ erhalten, so kann man ein anderes $g$ einfach durch Nutzung einer anderen Basis anstelle von $(e_1, e_2, e_3)$ erhalten*).

**Aufgabe P34 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des $K^n$).**
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3, \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ -2 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} x.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$.

(b) Ermitteln Sie, ob $\varphi$ injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

(c) Sei $U := \mathrm{Lin}(e_2, e_3, e_4) \subseteq \mathbb{Q}^4$. Weisen Sie nach, dass $\Phi = \varphi|_U : U \to \mathbb{Q}^3$ ein Isomorphismus ist.

(d) Sei $W := \mathrm{Bild}(\varphi)$. Geben Sie einen Isomorphismus $f : W \to \mathbb{Q}^3$ an.

**Lösung:** (a) (i) Untersuchung $\mathrm{Kern}(\varphi)$: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^4$ beliebig. Dann gilt:

$$\varphi(x) = 0 \qquad \iff \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ -2 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overset{2Z_1+Z_3 \to Z3}{\iff} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overset{(-3)Z_2+Z_3 \to Z3}{\iff} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\overset{3.\text{ Zeile}}{\Longrightarrow} x_4 = 0 \overset{2.\text{ Zeile}}{\Longrightarrow} x_2 = -2x_3 \overset{1.\text{ Zeile}}{\Longrightarrow} x_1 = -x_3 \Rightarrow x = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \text{Kern}(\varphi) \subset \text{Lin}(v_1) \text{ mit } v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt auch $\text{Kern}(\varphi) \supset \text{Lin}(v_1)$ (es gilt $\varphi(v_1) = 0$ und damit $\varphi(\text{Lin}(v_1)) = \text{Lin}(\varphi(v_1)) = \{0\}$).
$\Rightarrow \text{Kern}(F) = \text{Lin}(v_1)$, $(v_1)$ eine Basis.

(ii) Bestimme eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$: Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ -2 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$. Es gilt laut Vorlesung

$$\text{Bild}(\varphi) \quad = \quad \text{Lin}(\varphi(e_1), ..., \varphi(e_4)) = \text{Lin}(Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4).$$

Es genügt also, eine Basis von

$$\text{Lin}(Ae_1, Ae_2, Ae_3, Ae_4) = \text{Lin}\Big( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \end{pmatrix} \Big)$$

zu bestimmen. Dies machen wir wie üblich mit dem Gauß-Algorithmus (schreibe Vektoren als Zeilen in Matrix und bringe diese auf Zeilenstufenform):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \overset{(1/2)Z1+Z2\to Z2, (-2)Z1+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(-2)Z2+Z3\to Z3, (-1/3)Z2+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{Z3\leftrightarrow Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ ist

$$B = \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

insbesondere $\text{Bild}(\varphi) = \mathbb{Q}^3$ (3 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{Q}^3$ sind Basis und damit Erzeugendensystem).

(b) $\text{Kern}(\varphi) \neq \{0\} \implies \varphi$ ist nicht injektiv.
$\text{Bild}(\varphi) = \mathbb{Q}^3 \implies \varphi$ ist surjektiv.

(c) Bestimmung von $\mathrm{Kern}(\Phi) = \mathrm{Kern}(\varphi) \cap U$ (vgl. P36(a)):
(*Standardmethode: Löse Gleichungssystem zur Bestimmung des Schnitts zweier UVR, vgl. A18(c)) - die hier benutzte Methode geht i.A. schneller und läuft auf dasselbe hinaus.*
Sei $v_1$ der Basisvektor von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $(e_2, e_3, e_4)$ die Basisvektoren von $U$.
$\Rightarrow (v_1, e_2, e_3, e_4)$ sind linear unabhängig, denn (Gauß-Algorithmus):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist in Zeilenstufenform (keine Nullzeilen).
$\Rightarrow (v_1, e_2, e_3, e_4)$ ist Basis von $\mathbb{Q}^4$
$\overset{\text{Charakt. direkte Summe}}{\Rightarrow} \mathbb{Q}^4 = U \oplus \mathrm{Kern}(\varphi)$
$\overset{\text{Def. direkte Summe}}{\Rightarrow} \mathrm{Kern}(\Phi) = U \cap \mathrm{Kern}(\varphi) = \{0\}$.

$\Longrightarrow \Phi$ ist injektiv.
$\overset{\dim_{\mathbb{Q}}(U)=3=\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3)}{\Longrightarrow} \Phi$ ist Isomorphismus.

(d) Sei $B = (w_1, w_2, w_3)$ die in (a) ermittelte Basis von $W$.
P31(a) $\Rightarrow$ Es gibt eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : W \to \mathbb{Q}^3$ mit

$$f(w_i) = e_i \quad i = 1, 2, 3.$$

Da $f$ Basen auf Basen abbildet, ist $f$ ein Isormorphismus.
(*Langversion, nicht verlangt:*
$Bild(f) = f(Lin((w_1, w_2, w_3))) = Lin((f(w_1), f(w_2), f(w_3))) = Lin((e_1, e_2, e_3)) = \mathbb{Q}^3$
$\Rightarrow f$ *surjektiv* $\overset{dim_{\mathbb{Q}}(W)=3=dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3)}{\Rightarrow}$ $f$ *Isomorphismus.* )

**Aufgabe P35 (Lineare Abbildungen auf Polynomräumen).**
Für $D \in \mathbb{N}$ sei

$$P_D := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, \exists\, a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}.$$

der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens $D$. Es ist bekannt aus A22: $\dim_{\mathbb{R}} P_D = D + 1$ und $(p_0, ..., p_D)$ mit $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_i(x) = x^i$ $(i = 0, ..., D)$ ist eine Basis von $P_D$. Wir definieren zwei lineare Abbildungen

(i) $\psi : P_2 \to P_3, (\psi(p))(x) := \int_0^x p(s)\,\mathrm{d}s$ (Integration),

(ii) $\psi : P_2 \to \mathbb{R}^2, p \mapsto (p(-1), p(1))$ (Einsetzabbildung).

Lösen Sie jeweils für (i), (ii) die folgenden Aufgaben:

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\psi)$ und $\mathrm{Bild}(\psi)$.

(b) Überprüfen Sie, ob $\psi$ injektiv, surjektiv oder sogar ein Isomorphismus ist.

**Lösung:**

(a) (i)

- Bestimme Kern($\psi$): Sei $p \in P_2$ mit $\psi(p) = 0$
  $\implies \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k$.
  $\overset{\varphi(p)=0}{\implies} \forall\, x \in \mathbb{R}$:
  $$0 = \int_0^x p(s)\,\mathrm{d}s \overset{\text{linear}}{=} \int_0^x a_0\,\mathrm{d}s + \int_0^x a_1 s\,\mathrm{d}s + \int_0^x a_2 s^2\,\mathrm{d}s = a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3$$
  $\implies 0 = a_0 p_1 + \frac{a_1}{2} p_2 + \frac{a_2}{3} p_3 \overset{(p_1,p_2,p_3)\text{ lin. unabh.}}{\implies} a_0 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_2}{3} = 0$
  $\implies a_0 = a_1 = a_2 = 0$
  $\implies p = 0$
  d.h. Kern($\psi$) $\subset \{0\}$ und damit Kern($\psi$) $= \{0\}$ (Kern ist UVR).
- Bestimme Bild($\psi$): Es gilt
  $$\text{Bild}(\psi) = \varphi(P_2) = \psi(\text{Lin}(p_0, p_1, p_2)) = \text{Lin}(\psi(p_0), \psi(p_1), \psi(p_2))$$
  Integration liefert
  $$\psi(p_0) = p_1, \quad \psi(p_1) = \frac{1}{2}p_2, \quad \psi(p_2) = \frac{1}{3}p_3$$
  Damit gilt
  $$\text{Bild}(\psi) = \text{Lin}(\psi(p_0), \psi(p_1), \psi(p_2)) = \text{Lin}(p_1, \frac{1}{2}p_2, \frac{1}{3}p_3) = \text{Lin}(p_1, p_2, p_3).$$

(ii)

- Bestimme Kern($\psi$): Sei $p \in P_2$ mit $\psi(p) = 0$
  $\implies \exists\, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ mit $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $p(x) = \sum_{k=0}^{2} a_k x^k$. Dann ist
  $$\psi(p) = 0 \iff (p(-1), p(1)) = 0 \iff p(-1) = 0 \text{ und } p(1) = 0$$
  $\implies$
  (I) $a_0 - a_1 + a_2 = p(-1) = 0$
  (II) $a_0 + a_1 + a_2 = p(1) = 0.$

  $\overset{\text{(I) + (II)} \to \text{(II)}}{\implies}$
  (I) $a_0 - a_1 + a_2 = 0$
  (II') $2a_0 + 2a_2 = 0$

  $\overset{(II')}{\implies} a_2 = -a_0 \overset{(I)}{\implies} a_1 = 0$
  $\implies p = a_0 - a_0 p_2 = a_0(1 - p_2)$
  $\implies$ Kern($\psi$) $\subseteq$ Lin($(1 - p_2)$)
  Wir zeigen noch Kern($\psi$) $\supseteq$ Lin($(1 - p_2)$)
  Sei $p \in$ Lin($(1 - p_2)$). Dann existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $p = \lambda(1 - p_2)$.
  $\implies \forall\, x \in \mathbb{R}$: $p(x) = \lambda(1 - x^2)$
  $\implies p(-1) = p(1) = 0$
  $\implies p \in$ Kern($\psi$)
- Bestimme Bild($\psi$): Es gilt
  $$\text{Bild}(\psi) = \varphi(P_2) = \psi(\text{Lin}(p_0, p_1, p_2)) = \text{Lin}(\psi(p_0), \psi(p_1), \psi(p_2))$$
  Einsetzen liefert
  $$\psi(p_0) = (1, 1), \quad \psi(p_1) = (-1, 1), \quad \psi(p_2) = (1, 1)$$

Anwendung des Gauß-Algorithmus zur Bestimmung einer Basis:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{Z1+Z2\to Z2, (-1)\cdot Z1+Z3\to Z3}{\to} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$\mathrm{Bild}(\psi) = \mathrm{Lin}(\psi(p_0), \psi(p_1), \psi(p_2)) = \mathrm{Lin}((1,1),(0,2)) \overset{(*)}{=} \mathbb{R}^2.$$

(Schritt $(*)$: 2 linear unabhängige Vektoren in $\mathbb{R}^2$ bilden Basis des $\mathbb{R}^2$ und damit Erzeugendensystem)

(b) (i) Aus (a)(i):
$\mathrm{Kern}(\psi) = \{0\} \implies \psi$ ist injektiv.
Ferner $\mathrm{Bild}(\psi) \neq P_4 \implies \psi$ ist nicht surjektiv.

(ii) Aus (a)(ii):
$\mathrm{Kern}(\psi) \neq \{0\} \implies \psi$ ist nicht injektiv.
Ferner $\mathrm{Bild}(\psi) = \mathbb{R}^2 \implies \psi$ ist surjektiv.

**Aufgabe P36 (Nachweise mit Kern/Bild von linearen Abbildungen).**

Seien $V, W$ Vektorräume über einem Körper $K$. Seien $\varphi, \psi : V \to W$ lineare Abbildungen.

(a) Sei $U$ ein Untervektorraum von $V$. Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(\varphi|_U) = \mathrm{Kern}(\varphi) \cap U$.

Sei nun $V = W$, d.h. $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(b) $\mathrm{Bild}(\varphi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$

(c) Falls $\dim_K(V) = 3$, so ist $\mathrm{Rang}(\varphi) = 2$ und $\varphi \circ \varphi = 0$ nicht möglich.

(d) Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $\varphi \circ \psi = 0$, so folgt $\mathrm{Rang}(\varphi) + \mathrm{Rang}(\psi) \leq \dim_K(V)$.

(e) Gilt $\varphi \circ \varphi = \varphi$, so folgt $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$.

*Hinweis zu (c) und (d): Sie dürfen die Aussage* $\varphi \circ \psi = 0 \implies \mathrm{Bild}(\psi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$ *ohne Beweis verwenden.*

**Lösung:**

(a) (*Erinnerung:* $\varphi|_U : U \to W$ *ist die Einschränkung*).
Sei $v \in \mathrm{Kern}(\varphi|_U)$.
$\iff v \in U$ und $\varphi(v) = 0$
$\iff v \in U$ und $v \in \mathrm{Kern}(\varphi)$.
$\iff v \in U \cap \mathrm{Kern}(\varphi)$.

(b) Sei $v \in \mathrm{Bild}(\varphi \circ \varphi)$.
$\Rightarrow$ Es gibt $x \in V$ mit $(\varphi \circ \varphi)(x) = v$
Wähle $x' := \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x') = \varphi(\varphi(x)) = v$.
$\Rightarrow v \in \mathrm{Bild}(\varphi)$.

(c) Angenommen, $\varphi \in \mathrm{End}_K(V)$ hat die Eigenschaften $\dim_K(V) = 3$, $\mathrm{Rang}(\varphi) = 2$ und $\varphi \circ \varphi = 0$.
Dimensionsformel für lineare Abbildungen liefert:

$$3 = \dim_K(V) = \underbrace{\dim_K \mathrm{Bild}(\varphi)}_{=\mathrm{Rang}(\varphi)} + \dim_K \mathrm{Kern}(\varphi) = 2 + \dim_K \mathrm{Kern}(\varphi).$$

$\Rightarrow \dim_K \mathrm{Kern}(\varphi) = 1$.
Wegen $\varphi \circ \varphi = 0 \overset{\text{Hinweis}}{\Rightarrow} \mathrm{Bild}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi) \Rightarrow 2 = \dim_K \mathrm{Bild}(\varphi) \leq \dim_K \mathrm{Kern}(\varphi) = 1$, Widerspruch!

(d) Es gilt:

$$\begin{aligned} & \mathrm{Rang}(\varphi) + \mathrm{Rang}(\psi) \\ \overset{\text{Def.}}{=} \quad & \dim_K(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim_K(\mathrm{Bild}(\psi)) \\ \overset{\mathrm{Bild}(\psi) \subset \mathrm{Kern}(\varphi)}{\leq} \quad & \dim_K(\mathrm{Bild}(\varphi)) + \dim_K(\mathrm{Kern}(\varphi)) \\ \overset{\text{Dim.-formel lin. Abb.}}{=} \quad & \dim_K(V). \end{aligned}$$

(e) Wir zeigen $V = \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$

(i) Für $v \in V$ gilt $v = (v - \varphi(v)) + \varphi(v)$. Wir wollen zeigen: $v - \varphi(v) \in \mathrm{Kern}(\varphi)$. Es gilt

$$\varphi(v - \varphi(v)) \overset{\text{lin. Abb.}}{=} \varphi(v) - \varphi(\varphi(v)) \overset{\varphi\circ\varphi=\varphi}{=} \varphi(v) - \varphi(v) = 0.$$

$\Longrightarrow \; v = (v - \varphi(v)) + \varphi(v) \in \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi)$

(ii) Bleibt zu zeigen $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$. Sei dazu $v \in \mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi)$.
$\Longrightarrow \; \exists\, w \in V : \varphi(w) = v,\ \varphi(v) = 0$
$\Longrightarrow \; 0 = \varphi(v) \overset{\varphi(w)=v}{=} \varphi(\varphi(w)) \overset{\varphi\circ\varphi=\varphi}{=} \varphi(w) = v$.
Daher $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) \subset \{0\}$, daher $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{0\}$ (linke Seite ist UVR).

$\Longrightarrow \; V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$

---

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

**Homepage der Vorlesung:**
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`