Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

9. Präsenzblatt

Aufgabe P33 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des K^n).
Gegeben seien folgende Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, w_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wir definieren die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ gegeben durch $\varphi(v_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ (vgl. Aufgabe P31 (a)).

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ und geben Sie $\text{Rang}(\varphi)$ an.

(b) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\varphi))$.

(c) Zeigen Sie (ohne (d) zu benutzen) die Isomorphie $U := \text{Bild}(\varphi) \cong \mathbb{R}^3$ von Vektorräumen.

(d) Zeigen Sie, dass die lineare Abbildung

$$f : U \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_3 - x_1 \\ x_1 + 3x_3 - x_4 \\ 2x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus ist.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst Kern(f) mittels P36(a).

(e) Definieren Sie einen weiteren Isomorphismus $g : U \to \mathbb{R}^3$ mit $g \neq f$.

Aufgabe P34 (Nachrechnen von Eigenschaften linearer Abbildungen des K^n).
Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3, \qquad x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{3} \\ -2 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} x.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von $\text{Kern}(\varphi)$ und $\text{Bild}(\varphi)$.

(b) Ermitteln Sie, ob φ injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv ist.

(c) Sei $U := \text{Lin}(e_2, e_3, e_4) \subseteq \mathbb{Q}^4$. Weisen Sie nach, dass $\Phi = \varphi|_U : U \to \mathbb{Q}^3$ ein Isomorphismus ist.

(d) Sei $W := \text{Bild}(\varphi)$. Geben Sie einen Isomorphismus $f : W \to \mathbb{Q}^3$ an.

Aufgabe P35 (Lineare Abbildungen auf Polynomräumen).
Für $D \in \mathbb{N}$ sei

$$P_D := \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists\, a_0, ..., a_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{D} a_k x^k\}.$$

der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{R}$ vom Grad höchstens D. Es ist bekannt aus A22: $\dim_{\mathbb{R}} P_D = D + 1$ und $(p_0, ..., p_D)$ mit $p_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, p_i(x) = x^i$ $(i = 0, ..., D)$ ist eine Basis von P_D. Wir definieren zwei lineare Abbildungen

(i) $\psi : P_2 \to P_3, (\psi(p))(x) := \int_0^x p(s)\,\mathrm{d}s$ (Integration),

(ii) $\psi : P_2 \to \mathbb{R}^2, p \mapsto (p(-1), p(1))$ (Einsetzabbildung).

Lösen Sie jeweils für (i), (ii) die folgenden Aufgaben:

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(\psi)$ und $\mathrm{Bild}(\psi)$.

(b) Überprüfen Sie, ob ψ injektiv, surjektiv oder sogar ein Isomorphismus ist.

Aufgabe P36 (Nachweise mit Kern/Bild von linearen Abbildungen).
Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Seien $\varphi, \psi : V \to W$ lineare Abbildungen.

(a) Sei U ein Untervektorraum von V. Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(\varphi|_U) = \mathrm{Kern}(\varphi) \cap U$.

Sei nun $V = W$, d.h. $\varphi, \psi \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie:

(b) $\mathrm{Bild}(\varphi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi)$

(c) Falls $\dim_K(V) = 3$, so ist $\mathrm{Rang}(\varphi) = 2$ und $\varphi \circ \varphi = 0$ nicht möglich.

(d) Ist $\dim_K(V) < \infty$ und $\varphi \circ \psi = 0$, so folgt $\mathrm{Rang}(\varphi) + \mathrm{Rang}(\psi) \le \dim_K(V)$.

(e) Gilt $\varphi \circ \varphi = \varphi$, so folgt $V = \mathrm{Kern}(\varphi) \oplus \mathrm{Bild}(\varphi)$.

Hinweis zu (c) und (d): Sie dürfen die Aussage $\varphi \circ \psi = 0 \implies \mathrm{Bild}(\psi) \subseteq \mathrm{Kern}(\varphi)$ *ohne Beweis verwenden.*

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`