Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

8. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P29 (Nachweise mit der Dimensionsformel).

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $U, W \subset V$ Untervektorräume.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^{15}$, $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 7$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 11$. In welchen Bereichen kann dann $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$ liegen?

(b) Zeigen Sie: Gilt $\dim_K(U) = \dim_K(W) = n$ und $\dim_K(U \cap W) = 1$, so folgt $\dim_K(V) \geq 2n - 1$.

(c) Zeigen Sie: Gilt $\dim_K(V) = n$ und $\dim_K(U) = \dim_K(W) = n-1$, so ist $\dim_K(U \cap W) \geq n - 2$.

Seien nun U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V.

(d) Zeigen Sie:

$$\dim_K(U_1 + U_2 + U_3) \leq \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) + \dim_K(U_3)$$

(e) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass aus $V = U_1 + U_2 + U_3$ und $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j : U_i \cap U_j = \{0\}$ nicht $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ folgt.

Lösung:

(a) Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U)}_{=7} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(W)}_{=11} - \dim_{\mathbb{R}}(U + W) = 18 - \dim_{\mathbb{R}}(U + W). \quad (*)$$

Analysiere die Einschränkungen:

(I) $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) \overset{U \cap W \subset U, U \cap W \subset W}{\leq} \min\{\dim_{\mathbb{R}}(U), \dim_{\mathbb{R}}(W)\} = \min\{7, 11\} = 7.$

(II) $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) \overset{U+W \subset \mathbb{R}^{15}}{\leq} \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{15}) = 15$

(III) $\dim_{\mathbb{R}}(U + W) \overset{U \subset U+W, W \subset U+W}{\geq} \max\{\dim_{\mathbb{R}}(U), \dim_{\mathbb{R}}(W)\} = \max\{7, 11\} = 11.$

Aus (*) folgt mit (II),(III):

$$\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) = 18 - \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U + W)}_{\geq 11, \leq 15} \in \{3, ..., 7\}$$

Dies ist verträglich mit (I), d.h. $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W) \in \{3, ..., 7\}$.

(b) Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\dim_K(V) \overset{U+W\subset V \text{ UVR}}{\geq} \dim_K(U+W) = \dim_K(U) + \dim_K(W) - \dim_K(U\cap W)$$
$$= n + n - 1 = 2n - 1$$

(c) Dimensionsformel $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\dim_K(U_1\cap U_2) &= \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \underbrace{\dim_K(U_1+U_2)}_{\overset{U_1+U_2\subset V \text{ UVR}}{\leq} \dim_K(V)=n} \\ &\geq (n-1) + (n-1) - n = n-2.\end{aligned}$$

(d) Dimensionsformel (beachte $U_1 + U_2 + U_3 = (U_1 + U_2) + U_3$) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&\dim_K(U_1+U_2+U_3) \\ &= \dim_K(U_1+U_2) + \dim_K(U_3) - \underbrace{\dim_K((U_1+U_2)\cap U_3)}_{\geq 0} \\ &\leq \dim_K(U_1+U_2) + \dim_K(U_3) \\ &\overset{\text{Dim.-Formel}}{=} \left[\dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \underbrace{\dim_K(U_1\cap U_2)}_{\geq 0}\right] \\ &\leq \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) + \dim_K(U_3).\end{aligned}$$

(e) Sei nun $K = \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}^2$. Wir definieren folgende Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$:

$$U_1 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}), \qquad U_2 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}), \qquad U_3 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$$

$$\Longrightarrow U_1 + U_2 + U_3 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \mathbb{R}^2 \text{ (vgl. P30 (a))}.$$

Es gilt offensichtlich (Bild!) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, $U_1 \cap U_3 = \{0\}$ und $U_2 \cap U_3 = \{0\}$.

Aber es ist nicht $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$, denn dafür müsste laut Vorlesung gelten:

$$2 = \dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(U_1) + \dim_{\mathbb{R}}(U_2) + \dim_{\mathbb{R}}(U_3) = 1 + 1 + 1 = 3,$$

Widerspruch.

Aufgabe P30 (Dimensionen und direkte Summen von Untervektorräumen).
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, $v_1, ..., v_n, v'_1, ..., v'_m \in V$ Vektoren und $U_1 := \mathrm{Lin}((v_1, ..., v_n))$, $U_2 := \mathrm{Lin}((v'_1, ..., v'_m))$.

(a) Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2 = \mathrm{Lin}((v_1, ..., v_n, v'_1, ..., v'_m))$.

Gegeben seinen die Untervektorräume des $\mathbb{Q}^3$

$$U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right) \text{ und } U_2 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-13\\-10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

(b) Ermitteln Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $U_1, U_2, U_1 + U_2$

(c) Ermitteln Sie die Dimension von $U_1 \cap U_2$.

(d) Geben Sie einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{Q}^3$ an, so dass $\mathbb{Q}^3 = U_2 \oplus W$ (und begründen Sie Ihre Wahl).

Lösung:

(a)

- „$\subseteq$“: Sei $v \in U_1 + U_2$
  $\Rightarrow$ Es gibt $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$.
  $\overset{U_1=\mathrm{Lin}(v_1,...,v_n)}{\Rightarrow}$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $u_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$
  $\overset{U_2=\mathrm{Lin}(v'_1,...,v'_n)}{\Rightarrow}$ Es gibt $\lambda'_1, ..., \lambda'_m \in K$ mit $u_2 = \sum_{i=1}^m \lambda'_i v'_i$
  $\Rightarrow v = u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^m \lambda'_i v'_i \in \mathrm{Lin}((v_1, ..., v_n, v'_1, ..., v'_m))$

- „$\supseteq$“: $v_1, ..., v_n \in U_1$, $v'_1, ..., v'_m \in U_2 \Rightarrow v_1, ..., v_n, v'_1, ..., v'_m \in U_1 \cup U_2$
  $\overset{8.2}{\Rightarrow} \mathrm{Lin}((v_1, ..., v_n, v'_1, ..., v'_m)) \subset \mathrm{Lin}(U_1 \cup U_2) = U_1 + U_2$.

(b) (i) Basis und Dimension für U_1: Es gilt

$$\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad U_1 = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$$

Die Vektoren $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\end{pmatrix}^t$ und $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^t$ sind linear unabhängig, da sie offensichtlich keine Vielfachen voneinander sind.

$\Longrightarrow$ Eine Basis von U_1 ist

$$B_1 := \left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(U_1) = 2$

Für einen systematischen Ansatz siehe (ii), wo U_2 diskutiert wird.

(ii) Basis und Dimension für U_2: Die Vektoren in U_2 werden als Zeilen einer Matrix aufgeschrieben und über elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform gebracht.

$$A := \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\-1 & 2 & 2\\2 & -13 & -10\\2 & -1 & -2\end{pmatrix} \overset{Z1+Z2\to Z2,(-2)Z1+Z3\to Z3,(-2)Z1+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & 2\\0 & -15 & -10\\0 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\overset{5Z2+Z3\to Z3,Z2+Z4\to Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & 2\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} =: B$$

Vorlesung $\Longrightarrow$ $U_1 = ZR(A) = ZR(B)$ und die Nicht-Nullzeiulen von B bilden eine Basis von $ZR(B) = U_1 \Longrightarrow$

$$B_2 := \left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right)$$

ist eine Basis von U_2.

$\implies \dim_{\mathbb{Q}}(U_2) = 2$

(iii) Basis und Dimension für $U_1 + U_2$: (a),(b) und (c)

$\implies$

$$U_1 + U_2 = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix})$$

Die angegebenen Vektoren werden als Zeilebn einer Matrix aufgefasst und per Gauß–Algorithmus über elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform gebracht.

Wir zeigen, dass die Vektoren eine Basis von $U_1 + U_2$ bilden:

$$A := \begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 3 & 2\end{pmatrix} \overset{Z1\leftrightarrow Z3, Z2\leftrightarrow Z3, (-1)Z1+Z3\rightarrow Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

$$\overset{(-3)Z2+Z3\rightarrow Z3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

$$\overset{(-4)Z3+Z4\rightarrow Z4}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix} =: B$$

Vorlesung $\implies U_1 + U_2 = ZR(A) = ZR(B)$ und die Nicht–Nullzeilen von B ergeben eine Basis von $ZR(B) = U_1 + U_2 \implies$

$$B_3 := (\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\}$$

ist eine Basis von $U_1 + U_2$.

$\implies \dim_{\mathbb{Q}}(U_1 + U_2) = 3$

(c) Dimensionsformel $\implies$

$$\dim_K(U_1 \cap U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 + U_2) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

(d) *Ansatz (nicht Teil der Lösung): Betrtachte die Matrix B in Zeilenstufenform für U_2 (vgl. (a)(ii)), bei welcher die Nullzeilen gelöscht sind:*

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & 2\end{pmatrix}$$

Wir wählen denjenigen Einheitsvektoren aus, welche in B eingefügt die Zeilenstufenform beibehlaten. Hier ist das e_1.

Sei $W = \mathrm{Lin}(e_3)$.

In (a) wurde eingesehen, dass $U_2 = \mathrm{Lin}(b_1, b_2)$ mit $b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$.

Aus Teilaufgabe (a) $\Longrightarrow$

$$U_2 + W = \mathrm{Lin}(b_1, b_2, e_3) = \mathbb{Q}^3.$$

Schreiben wir die Vektoren zeilenweise in eine Matrix, so sehen wir, dass diese in Zeilenstufenform ist. $\Longrightarrow$ (b_1, b_2, e_3) sind linear unabhängig

$\overset{\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3)=3}{\Longrightarrow}$ b_1, b_2, e_3 ist eine Bais von $\mathbb{Q}^3$.

$$\Longrightarrow U_2 + W = \mathrm{Lin}(b_1, b_2, e_3) = \mathbb{Q}^3$$

Der Vektor e_3 alleine ist linear unabhängig. $\Longrightarrow$ $\dim_{\mathbb{Q}}(W) = 1$

$\overset{(b)}{\Longrightarrow}$ $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}^3) = 3 = 2 + 1 = \dim_{\mathbb{Q}}(U_2) + \dim_{\mathbb{Q}}(W)$

$\overset{\mathbb{Q}^3=U_2+W,\text{ VL 8.5}}{\Longrightarrow}$ $\mathbb{Q}^3 = U_2 \oplus W$

Aufgabe P31 (Definition linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis).
Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n$.

(a) Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V und $w_1, ..., w_n \in W$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $\forall i \in \{1, ..., n\} : f(v_i) = w_i$.

Sei nun $K = \mathbb{R}$ und $V = W = \mathbb{R}^2$. Gegeben seien weiter die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}.$$

(v_1, v_2) ist eine Basis von V. Sei f die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$.

(b) Sei $v = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}(2v_1 - v_2)$. Bestimmen Sie $f(v)$.

(c) Finden Sie $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass $f = \tilde{A}$.
Hinweis: Laut Vorlesung muss dafür gelten: $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in V$.

(d) Kann es eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ geben mit

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-10\\-5\end{pmatrix} \quad ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a)
- Existenz: Wir definieren $f : V \to W$ wie folgt:
  $\overset{(v_1,...,v_n)\text{ Basis}}{\Rightarrow}$ Für $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$; definiere
  $$f(v) := \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i.$$
  (Wohldefiniert, da $\lambda_1, ..., \lambda_n$ eindeutig bestimmt).
  - Es gilt $\forall i \in \{1, ..., n\} : f(v_i) = w_i$, denn:
    Sei $i \in \{1, ..., n\}$. Wegen $v_i = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_{i-1} + 1 \cdot v_i + 0 \cdot v_{i+1} + ... + 0 \cdot v_n$ gilt $f(v_i) = w_i$.

- f ist linear, denn:
  Seien $v, v' \in V$, $\mu \in K$.
  $\Rightarrow$ Es gibt eindeutig bestimmte $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$, $\lambda_1', ..., \lambda_n' \in K$ mit

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \qquad v' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' v_i.$$

  $\Rightarrow v + v' = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_i') v_i$
  $\Rightarrow f(v + v') = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \lambda_i') w_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' w_i = f(v) + f(v')$.
  $\Rightarrow \mu v = \sum_{i=1}^{n} (\mu \cdot \lambda_i) v_i$
  $\Rightarrow f(\mu v) = \sum_{i=1}^{n} (\mu \lambda_i) w_i = \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i = \mu \cdot f(v)$.

- Eindeutigkeit: Sei $g : V \to W$ eine weitere lineare Abbildung mit der Eigenschaft $\forall i \in \{1, ..., n\} : g(v_i) = w_i$.
  Sei $v \in V$ beliebig.
  $\Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$.

$$\Longrightarrow g(v) = g\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\Big) \overset{g \text{ linear}}{=} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i \overset{\text{Def. } f}{=} f(v).$$

(b) $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = f(\frac{1}{5}(2v_1 - v_2)) \overset{f \text{ linear}}{=} \frac{2}{5} f(v_1) - \frac{1}{5} f(v_2) = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(c) Vorlesung $\Rightarrow$ Die i-te Spalte der Matrix A ist das Bild $f(e_i)$ des i-ten Einheitsvektors e_i unter f, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ f(e_1) & f(e_2) \\ | & | \end{pmatrix}$$

$f(e_2)$ ist aus (b) bekannt; berechne also noch $f(e_1)$.
Gesucht sind $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $e_2 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

Löse LGS (Z1 = Zeile 1, Z2 = Zeile 2):

$$\begin{aligned} & e_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \overset{(-3)Z1+Z2 \to Z2}{\Longleftrightarrow} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z2 $\Rightarrow \lambda_2 = \frac{3}{5}$
Z1 $\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{5}$.

Wir erhalten also: $e_1 = -\frac{1}{5} v_1 + \frac{3}{5} v_2$
$\Rightarrow f(e_1) = -\frac{1}{5} f(v_1) + \frac{3}{5} f(v_2) = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ f(e_1) & f(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(d) Diese lineare Abbildung existiert.

- Ansatz 1 (aufwendig, falls nicht Vorarbeit aus (c) vorläge): Bestimme wie in (c) die Matrix $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass $\varphi = \tilde{A}$ aus den ersten beiden Bedingungen

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

und überprüfe, ob die dritte Bedingung $f(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$ erfüllt ist.

Aus (b)/(c) bekannt:

$$e_2 = \frac{2}{5}v_1 - \frac{1}{5}v_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(e_2) = \frac{2}{5}\varphi(v_1) - \frac{1}{5}\varphi(v_2) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$e_1 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{3}{5}v_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(e_1) = -\frac{1}{5}\varphi(v_1) + \frac{3}{5}\varphi(v_2) = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -16 \\ -8 \end{pmatrix},$$

d.h. $\varphi = \tilde{A}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} | & | \\ \varphi(e_1) & \varphi(e_2) \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -16 & 2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfen der 3. Bedingung: $\varphi(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -16 & 2 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Damit erfüllt das oben gefundene φ alle 3 Bedingungen.

- Ansatz 2 (liefert schneller eine Antwort, falls keine Vorarbeit vorhanden):
(v_1, v_2) Basis $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ Erhalte eindeutig bestimmtes φ aus den ersten beiden Bedingungen

$$\varphi(v_1) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(v_2) = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Überprüfe Verträglichkeit mit Bedingung 3: Suche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ \Longleftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \\ \overset{(-3)Z1+Z2\to Z2}{\Longleftrightarrow} \quad & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z2 $\Rightarrow \lambda_2 = 1$
Z1 $\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_1 = 2$
Also insgesamt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 2v_1 + v_2$$

φ linear $\Rightarrow$

$$\varphi(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}) = 2\varphi(v_1) + \varphi(v_2) = 2\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix},$$

d.h. φ erfüllt auch die 3. Bedingung (es entsteht kein Widerspruch).

Aufgabe P32 (Beispiele und Gegenbeispiele für lineare Abbildungen).

Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildungen f_i zwischen den gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen linear sind oder nicht (geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel).

(a) (i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,
   (ii) $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1x_4 - x_2x_3$,
   (iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1)$,
   (iv) $f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_1$,
   (v) $f_5 : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), A \mapsto A^t$,
   (vi) $f_6 : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), A \mapsto A^2$.

(b) Partialsummenbildung: $f_7 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\sum_{k=1}^n a_k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung:

(a) (i) f_1 ist nicht linear, denn: Wähle $x = 1 \in \mathbb{R}$ und $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$, so gilt

$$\begin{array}{rrcl} & f_1(\lambda \cdot x) & = & f_1(-1) = |-1| = 1, \\ \text{aber} & \lambda \cdot f_1(x) & = & (-1) \cdot f_1(1) = (-1) \cdot |1| = -1. \end{array}$$

(ii) f_2 ist nicht linear, denn: Wähle $x_1 = 2$, $x_2, x_3, x_4 = 1$ und $\lambda = 2$, so gilt

$$\begin{array}{rrcl} & f_2(\lambda \cdot x) & = & f_2((4,2,2,2)) = 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4, \\ \text{aber} & \lambda \cdot f_2(x) & = & 2 \cdot f_2((2,1,1,1)) = 2 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 2. \end{array}$$

(iii) f_3 ist linear, denn: Seien $x = (x_1, x_2, x_3)$, $x' = (x'_1, x'_2, x'_3) \in \mathbb{R}^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} f_3(x + x') & = & f_3((x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3)) = (x_2 + x'_2, x_1 + x'_1), \\ & = & (x_2, x_1) + (x'_2, x'_1) = f_3(x) + f_3(x') \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} f_3(\lambda \cdot x) & = & f_3((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)) = (\lambda x_2, \lambda x_1), \\ & = & \lambda(x_2, x_1) = \lambda \cdot f_3(x) \end{array}$$

(iv) f_4 ist linear, denn: Seien $x = (x_1, ..., x_n)$, $x' = (x'_1, ..., x'_n) \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f_4(x + x') = f_4((x_1 + x'_1, ..., x_n + x'_n)) = x_1 + x'_1 = f_4(x) + f_4(x')$$

und

$$f_4(\lambda \cdot x) = f_4((\lambda x_1, ..., \lambda x_n)) = \lambda x_1 = \lambda \cdot f_4(x)$$

(v) f_5 ist linear, denn: Seien $A, B \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f_5(A + B) = (A + B)^t = A^t + B^t = f_5(A) + f_5(B),$$

und

$$f_5(\lambda A) = (\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda f_5(A).$$

(vi) f_6 ist nicht linear, denn: Wähle $A = 2E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, $\lambda = 3 \in \mathbb{R}$, so gilt:

$$f_6(\lambda \cdot A) = f_6(\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 36 & 0 \\ 0 & 36 \end{pmatrix},$$

aber

$$\lambda \cdot f_6(A) = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

(b) f_7 ist linear, denn: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f_7((a_n)_{n\in\mathbb{N}} + (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\overset{\text{Def. Add.}}{=} f_7((a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{\text{Def. } f_7}{=} (\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k))_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{\text{Def. Add.}}{=} (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} + (\sum_{k=1}^{n} b_k)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{Def. } f_7}{=} f_7((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) + f_7((b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f_7(\lambda \cdot (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) &\overset{\text{Def. skal. Mult.}}{=} f_5((\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \overset{\text{Def. } f_7}{=} (\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \\ &\overset{\text{Def. skal. Mult.}}{=} \lambda \cdot (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{Def. } f_7}{=} \lambda \cdot f_7((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \end{aligned}$$

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`