Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

8. Präsenzblatt

Aufgabe P29 (Nachweise mit der Dimensionsformel).
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $U, W \subset V$ Untervektorräume.

(a) Sei $V = \mathbb{R}^{15}$, $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 7$ und $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 11$. In welchen Bereichen kann dann $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap W)$ liegen?

(b) Zeigen Sie: Gilt $\dim_K(U) = \dim_K(W) = n$ und $\dim_K(U \cap W) = 1$, so folgt $\dim_K(V) \geq 2n - 1$.

(c) Zeigen Sie: Gilt $\dim_K(V) = n$ und $\dim_K(U) = \dim_K(W) = n-1$, so ist $\dim_K(U \cap W) \geq n - 2$.

Seien nun U_1, U_2, U_3 Untervektorräume von V.

(d) Zeigen Sie:

$$\dim_K(U_1 + U_2 + U_3) \leq \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) + \dim_K(U_3)$$

(e) Zeigen Sie mittels eines Gegenbeispiels, dass aus $V = U_1 + U_2 + U_3$ und $\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j : U_i \cap U_j = \{0\}$ nicht $V = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$ folgt.

Aufgabe P30 (Dimensionen und direkte Summen von Untervektorräumen).
Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, $v_1, ..., v_n, v_1', ..., v_m' \in V$ Vektoren und $U_1 := \text{Lin}((v_1, ..., v_n))$, $U_2 := \text{Lin}((v_1', ..., v_m'))$.

(a) Zeigen Sie, dass $U_1 + U_2 = \text{Lin}((v_1, ..., v_n, v_1', ..., v_m'))$.

Gegeben seinen die Untervektorräume des $\mathbb{Q}^3$

$$U_1 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right) \text{ und } U_2 = \text{Lin}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-13\\-10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

(b) Ermitteln Sie jeweils die Dimension und eine Basis von $U_1, U_2, U_1 + U_2$

(c) Ermitteln Sie die Dimension von $U_1 \cap U_2$.

(d) Geben Sie einen Untervektorraum $W \subset \mathbb{Q}^3$ an, so dass $\mathbb{Q}^3 = U_2 \oplus W$ (und begründen Sie Ihre Wahl).

Aufgabe P31 (Definition linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis).
Seien V, W K-Vektorräume mit $\dim_K(V) = n$.

(a) Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von V und $w_1, ..., w_n \in W$. Zeigen Sie: Es gibt genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $\forall i \in \{1, ..., n\} : f(v_i) = w_i$.

Sei nun $K = \mathbb{R}$ und $V = W = \mathbb{R}^2$. Gegeben seien weiter die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(v_1, v_2) ist eine Basis von V. Sei f die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v_1) = w_1,\ f(v_2) = w_2$.

(b) Sei $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(2v_1 - v_2)$. Bestimmen Sie $f(v)$.

(c) Finden Sie $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, so dass $f = \tilde{A}$.
Hinweis: Laut Vorlesung muss dafür gelten: $f(x) = A \cdot x$ für alle $x \in V$.

(d) Kann es eine lineare Abbildung $\varphi : V \to W$ geben mit

$$\varphi(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \end{pmatrix} \quad ?$$

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe P32 (Beispiele und Gegenbeispiele für lineare Abbildungen).

Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildungen f_i zwischen den gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräumen linear sind oder nicht (geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel).

(a) (i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$,

(ii) $f_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1x_4 - x_2x_3$,

(iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_1)$,

(iv) $f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, ..., x_n) \mapsto x_1$,

(v) $f_5 : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), A \mapsto A^t$,

(vi) $f_6 : M(2 \times 2, \mathbb{R}) \to M(2 \times 2, \mathbb{R}), A \mapsto A^2$.

(b) Partialsummenbildung: $f_7 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (\sum_{k=1}^{n} a_k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`