Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

7. Präsenzblatt – Lösungen

Aufgabe P25 (Dimension von Matrizenräumen).
Es sei K ein Körper und $V = M(n \times n, K)$ der Vektorraum der $n \times n$–Matrizen über K. Wir definieren die Menge

$$U \;:=\; \{A = (a_{ij}) \in V \,|\, \forall i \in \{1, ..., n\} : a_{ii} = a_{11} \text{ und } \forall i, j \in \{1, ..., n\} : i > j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$$

der oberen Dreiecksmatrizen mit gleichen Diagonalelementen.

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für U.

(c) Geben Sie $\dim_K(U)$ an.

Lösung:
Es bezeichne 0 die Nullmatrix.

(a) Sei $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in U$, $\lambda \in K$.

- $U \neq \emptyset$, da für die Nullmatrix gilt: $\forall i \in \{1, ..., n\} : a_{ii} = 0 = a_{11}$ und $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$: $i > j \Rightarrow (0)_{ij} = 0 \Rightarrow 0 \in U$.
- $A + B \in U$, denn:
  $\forall i \in \{1, ..., n\} : (A + B)_{ii} = a_{ii} + b_{ii} \overset{A,B \in U}{=} a_{11} + b_{11} = (A + B)_{11}$,
  $\forall i, j \in \{1, ..., n\} : i > j \Rightarrow (A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \overset{A,B \in U}{=} 0 + 0 = 0$.
- $\lambda A \in U$, denn:
  $\forall i \in \{1, ..., n\} : (\lambda A)_{ii} = \lambda a_{ii} \overset{A \in U}{=} \lambda \cdot a_{11} = (\lambda A)_{11}$,
  $\forall i, j \in \{1, ..., n\} : i > j \Rightarrow (\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij} \overset{A \in U}{=} \lambda \cdot 0 = 0$.

(b) *Ansatz zum Finden einer Basis.*

Sei $A = (a_{ij}) \in U \overset{A \in U}{\Rightarrow}$ es werden keine Bedingungen an a_{ij} für alle $i < j$ gestellt; diese sind daher beliebig.
Alle a_{ii} $(i = 1, ..., n)$ müssen gleich sein.

$\Rightarrow$ Zur Beschreibung einer Matrix $A \in U$ reicht die Angabe von a_{ij}, $i < j$ und von a_{11}; alle anderen Komponenten sind 0.

Behauptung: $((E_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}, E_n)$ bilden eine Basis von U.

- Erzeugendensystem: Sei $A = (a_{ij}) \in U$.
  Ziel: Finde $\lambda, \lambda_{ij} \in K$, $1 \leq i < j \leq n$, sodass $A = \lambda E_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij}$.
  Wähle

$$\lambda_{ij} := a_{ij}, \qquad 1 \leq i < j \leq n, \qquad \lambda := a_{11}$$

Sei $k, l \in \{1, ..., n\}$, $k < l$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}\Big(\lambda \cdot E_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij}\Big)_{kl} &= \lambda \cdot \underbrace{(E_n)_{kl}}_{=0} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \cdot \underbrace{(E_{ij})_{kl}}_{=\begin{cases}1, & i = k \text{ und } j = l\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}} \\ &= \lambda_{kl} = a_{kl},\end{aligned}$$

und für $k > l$:

$$\begin{aligned}\Big(\lambda \cdot E_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij}\Big)_{kl} &= \lambda \cdot \underbrace{(E_n)_{kl}}_{=0} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \cdot \underbrace{(E_{ij})_{kl}}_{=0} \\ &= 0 = a_{kl},\end{aligned}$$

und für $k = l$:

$$\begin{aligned}\Big(\lambda \cdot E_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij}\Big)_{kk} &= \lambda \cdot \underbrace{(E_n)_{kk}}_{=1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \cdot \underbrace{(E_{ij})_{kl}}_{=0} \\ &= a_{11} = a_{kk},\end{aligned}$$

d.h. wir haben gesehen: $\lambda \cdot E_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij} = A$.

- Lineare Unabhängigkeit: Seien $\lambda, \lambda_{ij} \in K$, $1 \leq i < j \leq n$. Es gelte

$$0 = \lambda \cdot E_n + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij}.$$

Sei $1 \leq k < l \leq n$ beliebig. Es folgt

$$0 = \Big(\lambda \cdot E_n + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij}\Big)_{kl} = (\lambda \cdot E_n)_{kl} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \underbrace{(E_{ij})_{kl}}_{=\begin{cases}1, & i = k \text{ und } j = l\\ 0, & \text{sonst}\end{cases}} = \lambda_{kl}$$

d.h. $\lambda_{kl} = 0$ für alle $1 \leq k < l \leq n$.
Außerdem folgt:

$$0 = \Big(\lambda \cdot E_n + \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{ij} E_{ij}\Big)_{11} = \lambda \cdot \underbrace{(E_n)_{11}}_{=1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} \underbrace{(E_{ij})_{11}}_{=0} = \lambda.$$

(c) Die in (b) gefundene Basis hat Länge

$$1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 1 = 1 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} 1 = 1 + \sum_{j=1}^{n} (j - 1) = 1 + \frac{n(n-1)}{2},$$

d.h. $\dim_K(U) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$.

Aufgabe P26 (Basisbestimmung mittels Zeilenstufenform).

Gegeben seien die vier Vektoren im K^4:

$$v_1 = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}-2 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix},$$
$$v_3 = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix}2 & -4 & -1 & -5\end{pmatrix}$$

Wir definieren $U := \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_4\})$.
Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U und die Dimension $\dim_K(U)$ für

(a) $K = \mathbb{Q}$,

(b) $K = F_2$,

indem Sie die Vektoren in eine Matrix schreiben und mittels des Gauß-Algorithmus bzw. elementarer Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform bringen.

Lösung:

Wir nutzen den Gauß-Algorithmus: Schreibe Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 zeilenweise in eine Matrix A,

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

(a) Fall $K = \mathbb{Q}$: Wir wenden elementare Zeilenumformungen wie folgt an:

$$\begin{aligned}
A \quad &= \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(-2)Z1+Z2\to Z2,(-3)Z1+Z3\to Z3,2Z1+Z4\to Z4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(-2)Z2+Z3\to Z3,(-2)Z2+Z4\to Z4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z3\leftrightarrow Z4} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die Matrix B ist in Zeilenstufenform (ZSF).
Die Zeile b_4 ist eine Nullzeile. Es folgt

$$U = \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_4\}) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{ZR}(A) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \mathrm{ZR}(B) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Lin}(\{b_1, b_2, b_3\}),$$

und $(b_1, ..., b_4)$ ist Basis von $U \Rightarrow \dim_{\mathbb{Q}}(U) = 3$.

(b) Fall $K = F_2$: Wir wenden elementare Zeilenumformungen wie folgt an:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z1+Z2\to Z2, Z2+Z4\to Z4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z2+Z3\to Z3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B =: \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Matrix B ist in Zeilenstufenform (ZSF).
Offensichtlich sind die Zeilen b_1, b_2 nicht Null. Es folgt

$$U = \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_4\}) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{ZR}(A) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \mathrm{ZR}(B) \overset{\text{Def.}}{=} \mathrm{Lin}(\{b_1, b_2\}),$$

und (b_1, b_2) ist Basis von $U \Rightarrow \dim_{F_2}(U) = 2$.

Aufgabe P27 (Zeilenrang und inverse Matrizen).

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $q \in \mathbb{Q}$ den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & 2q \\ q & 1 & 1+q \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Seien Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 0, & j = i, \\ 1, & j \neq i, \end{cases} \qquad b_{ij} := \frac{1}{n-1} \begin{cases} -(n-2), & j = i, \\ 1, & j \neq i. \end{cases}$$

(i) Geben Sie die Matrizen A, B für $n = 4$ an (d.h. schreiben Sie diese als 4×4–Schema).

(ii) Zeigen Sie, dass $B = A^{-1}$.
Hinweis: Rechnen Sie nur eine Multiplikation nach, zum Beispiel $A \cdot B = E_n$.

Lösung:

(a) Wir bestimmen den Zeilenrang der gegebenen Matrix (nenne sie A) durch Überführung in Zeilenstufenform mittels elementarer Zeilenumformungen:

$$\begin{aligned}
A &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & 2q \\ q & 1 & 1+q \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{(-1)\cdot Z1+Z2\to Z2, (-q)\cdot Z1+Z3\to Z3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & q-1 & 2q-1 \\ 0 & 1-q & 1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z2\leftrightarrow Z3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q & 1 \\ 0 & q-1 & 2q-1 \end{pmatrix} \\
&\xrightarrow{Z2+Z3\to Z3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-q & 1 \\ 0 & 0 & 2q \end{pmatrix} =: B.
\end{aligned}$$

Fall $q=0$: Dann ist
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
in Zeilenstufenform mit 2 Nicht-Nullzeilen
$$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{ZR}(A) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \text{ZR}(B) = 2.$$
Fall $q=1$: Dann ist
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{(-2)\cdot Z2+Z3\to Z3}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: B',$$
und B' ist in Zeilenstufenform mit 2 Nicht-Nullzeilen
$$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{ZR}(A) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \text{ZR}(B') = 2.$$
Fall $q \in \mathbb{Q}\backslash\{0,1\}$: Dann ist B in Zeilenstufenform mit 3 Nicht-Nullzeilen.
$$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{Q}} \text{ZR}(A) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \dim_{\mathbb{Q}} \text{ZR}(B) = 3.$$

(b) (i) Für $n=4$ gilt:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(ii) Zu zeigen ist $A \cdot B = E_n$ und $B \cdot A = E_n$.
Wir zeigen nur $A \cdot B = E_n$, die andere Multiplikation geht analog.
Seien $i, k \in \{1, ..., n\}$.

- Diagonalelemente: *Erster Schritt jeweils: Teile die Summe in der Definition der Matrizenmultiplikation gemäß der Fallunterscheidung in der Definition von A, B so auf, dass die Elemente von A, B explizit hingeschrieben werden können.* Es gilt
$$\begin{aligned} (A\cdot B)_{ii} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = a_{ii}b_{ii} + \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{i\}} a_{ij}b_{ji} \\ &= 0 \cdot \frac{(-(n-2))}{n-1} + \underbrace{\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{i\}}}_{n-1 \text{ Summanden}} 1 \cdot \frac{1}{n-1} \\ &= 0 + (n-1)\cdot\frac{1}{n-1} = 1 = (E_n)_{ii}. \end{aligned}$$

- Nicht-Diagonalelemente: Seien $i \neq k$. Dann gilt
$$\begin{aligned} (A\cdot B)_{ik} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{ii}b_{ik} + a_{ik}b_{ii} + \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{i,k\}} a_{ij}b_{jk} \\ &= 0\cdot\frac{1}{n-1} + 1\cdot\frac{(-(n-2))}{n-1} + \underbrace{\sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{i,k\}}}_{(n-2)\text{ Summanden}} 1\cdot\frac{1}{n-1} \\ &= -\frac{n-2}{n-1} + (n-2)\cdot\frac{1}{n-1} = 0 = (E_n)_{ik}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: $(A \cdot B)_{ik} = (E_n)_{ik}$ für alle $i, k \in \{1, ..., n\}$, d.h. $A \cdot B = E_n$.

Aufgabe P28 (Zeilenrang, Invertierbarkeit und Kommutativität).
Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie:

(a) Für die Matrix $Q := (A, B) \in M(n \times 2n, K)$ gilt: $\text{Zeilenrang}(A) \leq \text{Zeilenrang}(Q)$.

(b) Ist $1 + 1 \neq 0$ in K und gilt für alle $C \in M(n \times n, K)$, dass $AC = CA$, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $A = \lambda E_n$.

(c) Sind A, B invertierbar, so gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Lösung:

(a) Sei $r = \text{Zeilenrang}(A)$.
Umformen auf Zeilenstufenform mittels Elementarmatrizen $\Rightarrow$ Es gibt $S \in M(n \times n, K)$ (Produkt von Elementarmatrizen) und $r \in \{0, ..., n\}$ mit

$$S \cdot A = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist in Zeilenstufenform (d.h. Zeilen $c_1, ..., c_r$ sind keine Nullzeilen).
$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(S \cdot A) = r$.
Es gilt

$$S \cdot Q = (S \cdot A, S \cdot B) = \begin{pmatrix} c_1 & * \\ \vdots & \vdots \\ c_r & * \\ 0 & * \\ \vdots & * \\ 0 & * \end{pmatrix},$$

wobei die Matrix weiterhin mindestens r Nicht-Nullzeilen besitzt.
$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(Q) \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{=} \text{Zeilenrang}(S \cdot Q) \geq r = \text{Zeilenrang}(A)$.

(b) Wir zeigen die Aussage in zwei Schritten. (1.) Die Matrix $A := (a_{kl})$ muss eine Diagonalgestalt haben und (2.) alle Diagonaleinträge sind gleich.

(1.) Wähle $C = \text{ZM}(1, 2)$.
$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 2a_{11} & ... & 2a_{1n} \\ a_{21} & ... & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} = \text{ZM}(1, 2) \cdot A = A \cdot \text{ZM}(1, 2) = \begin{pmatrix} 2a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vergleich erste Zeile $\Rightarrow 2a_{1j} = a_{1j} \Rightarrow a_{1j} = 0$ für $j \neq 1$.
Analog erhalten wir durch Wahl von $C = \text{ZM}(i, 2)$, $i = 1, ..., n$, dass $a_{ij} = 0$ für

$j \neq i$
$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

(2.) Wähle $C = ZV(1,2)$. $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = \mathrm{ZM}(1,2) \cdot A = A \cdot \mathrm{ZM}(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a_{11} = a_{22}$.
Analog erhalten wir für $C = ZV(1,i)$, $i = 1, ..., n$: $a_{11} = a_{ii}$.
$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot E_n.$$

(c)

- Wir zeigen, dass $(A^{-1})^t$ das Inverse von A^t ist (d.h. $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$). Es gilt

$$(A^{-1})^t \cdot A^t = (A \cdot A^{-1})^t = (E_n)^t = E_n,$$

und

$$A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = (E_n)^t = E_n.$$

- Wir zeigen, dass $B^{-1}A^{-1}$ das Inverse von $A \cdot B$ ist (d.h. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$). Es gilt

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n,$$

und

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = AE_nA^{-1} = AA^{-1} = E_n.$$

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`