Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

7. Präsenzblatt

Aufgabe P25 (Dimension von Matrizenräumen).

Es sei K ein Körper und $V = M(n \times n, K)$ der Vektorraum der $n \times n$–Matrizen über K. Wir definieren die Menge

$$U \quad := \quad \{A = (a_{ij}) \in V \,|\, \forall i \in \{1, ..., n\} : a_{ii} = a_{11} \text{ und } \forall i, j \in \{1, ..., n\} : i > j \Rightarrow a_{ij} = 0\}$$

der oberen Dreiecksmatrizen mit gleichen Diagonalelementen.

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis für U.

(c) Geben Sie $\dim_K(U)$ an.

Aufgabe P26 (Basisbestimmung mittels Zeilenstufenform).

Gegeben seien die vier Vektoren im K^4:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$v_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

Wir definieren $U := \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_4\})$.
Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U und die Dimension $\dim_K(U)$ für

(a) $K = \mathbb{Q}$,

(b) $K = F_2$,

indem Sie die Vektoren in eine Matrix schreiben und mittels des Gauß-Algorithmus bzw. elementarer Zeilenumformungen in eine Zeilenstufenform bringen.

Aufgabe P27 (Zeilenrang und inverse Matrizen).

(a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $q \in \mathbb{Q}$ den Zeilenrang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q & 2q \\ q & 1 & 1+q \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{Q})$$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Seien Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M(n \times n, \mathbb{R})$ definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 0, & j = i, \\ 1, & j \neq i, \end{cases} \qquad b_{ij} := \frac{1}{n-1} \begin{cases} -(n-2), & j = i, \\ 1, & j \neq i. \end{cases}$$

(i) Geben Sie die Matrizen A, B für $n = 4$ an (d.h. schreiben Sie diese als 4×4–Schema).

(ii) Zeigen Sie, dass $B = A^{-1}$.
Hinweis: Rechnen Sie nur eine Multiplikation nach, zum Beispiel $A \cdot B = E_n$.

Aufgabe P28 (Zeilenrang, Invertierbarkeit und Kommutativität).

Seien $A, B \in M(n \times n, K)$ Matrizen über einem Körper K. Zeigen Sie:

(a) Für die Matrix $Q := (A, B) \in M(n \times 2n, K)$ gilt: Zeilenrang$(A) \leq$ Zeilenrang(Q).

(b) Ist $1 + 1 \neq 0$ in K und gilt für alle $C \in M(n \times n, K)$, dass $AC = CA$, so gibt es ein $\lambda \in K$ mit $A = \lambda E_n$.

(c) Sind A, B invertierbar, so gilt $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ und $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`