6. Präsenzblatt - Lösungen

Aufgabe P21 (Dimensionen von Vektorräumen über verschiedenen Körpern).
Für einen Körper K sollen die im Folgenden auftretenden ganzen Zahlen in dem Sinne als Körperelemente aufgefasst werden, dass sie angeben, wie oft $1 \in K$ aufsummiert wird.
Wir definieren die folgenden Vektoren des K-Vektorraums K^4:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sei $U := \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ und $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4 : x_1 + 2x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(U)$, $\dim_{\mathbb{Q}}(W)$ und jeweils eine Basis von U, W.

(b) Sei $K = F_p$. Bestimmen Sie $\dim_{F_p}(U)$ und eine Basis von U für alle Primzahlen p.

Lösung:

(a)
- U: Wir prüfen zunächst die gegebenen Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{Q}^4$. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{Q}$ mit

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{lcl} I & 0 = & -\lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ II & 0 = & 2\lambda_1 + 18\lambda_2 - 2\lambda_3 - 4\lambda_4 \\ III & 0 = & 3\lambda_1 + 3\lambda_3 \\ IV & 0 = & -9\lambda_1 - 24\lambda_2 + 6\lambda_4 \end{array}$$

$$\overset{2\cdot I+II\to II,\, 3\cdot I+III\to III,\, (-9)\cdot I+IV\to IV}{\iff} \begin{array}{lcl} I' & 0 = & \lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ II' & 0 = & 6\lambda_2 \\ III' & 0 = & -18\lambda_2 + 6\lambda_3 + 6\lambda_4 \\ IV' & 0 = & 30\lambda_2 - 9\lambda_3 - 12\lambda_4 \end{array}$$

$$\overset{3\cdot II'+III'\to III',\, -5\cdot II'+IV'}{\iff} \begin{array}{lcl} I'' & 0 = & \lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ II'' & 0 = & 6\lambda_2 \\ III'' & 0 = & 6\lambda_3 + 6\lambda_4 \\ IV'' & 0 = & -9\lambda_3 - 12\lambda_4 \end{array}$$

$$\overset{2\cdot III''+IV'\to IV'}{\iff} \begin{array}{lcl} I^* & 0 = & \lambda_1 - 6\lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \\ II^* & 0 = & 6\lambda_2 \\ III^* & 0 = & 6\lambda_3 + 6\lambda_4 \\ IV^* & 0 = & 3\lambda_3 \end{array}$$

Aus II* und IV* folgt $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, eingesetzt in III* ergibt $\lambda_4 = 0$, mit I* folgt $\lambda_1 = 0$, d.h. insgesamt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

Damit ist (v_1, v_2, v_3, v_4) im $\mathbb{Q}$-VR $\mathbb{Q}^4$ linear unabhängig.
$\overset{\dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}^4=4}{\Rightarrow}$ (v_1, v_2, v_3, v_4) Basis von $\mathbb{Q}^4$ $\overset{\mathbb{Q}^4=\mathrm{Lin}(\{v_1,v_2,v_3,v_4\})=U\subseteq\mathbb{Q}^4}{\Rightarrow}$ $U = \mathbb{Q}^4$, $\dim_{\mathbb{Q}} U = 4$, Basis von U ist (v_1, v_2, v_3, v_4).

- W (nur über $K = \mathbb{Q}$): Es gilt

$$\begin{aligned} W &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Q}^4 : x_1 + 2x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{Q}^4 : x_2 = -\frac{1}{2}x_1, x_3 = x_1\} \\ &= \{(x_1, -\frac{1}{2}x_1, x_1, x_4) : x_1, x_4 \in \mathbb{Q}\} \\ &= \mathrm{Lin}(\{(1, -\frac{1}{2}, 1, 0), (0,0,0,1)\}). \quad (*) \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $((1, -\frac{1}{2}, 1, 0), (0,0,0,1))$ linear unabhängig, denn keiner der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.
Wegen (*) bildet $((1, -\frac{1}{2}, 1, 0), (0,0,0,1))$ auch ein Erzeugendensystem von W und damit eine Basis. Entsprechend ist $\dim_{\mathbb{Q}}(W) = 2$.

(b) Wie in (a) untersuchen wir die Vektoren zunächst auf lineare Unabhängigkeit im F_p–VR F_p^4. Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in F_p$ mit

$$0 = \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{llcccccccc} I & 0 & = & \lambda_1 & - & 6\lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 \\ II & 0 & = & & & 6\lambda_2 & & & & \\ III & 0 & = & & & & & 6\lambda_3 & + & 6\lambda_4 \\ IV & 0 & = & & & & & 3\lambda_3 & & \end{array}$$

Beachte: Aufgrund der Konvention in der Aufgabenstellung (ganze Zahlen geben an wie häufig 1 aufsummiert wird) ist es möglich, sämtliche ganzen Zahlen zu verwenden, auch wenn sie formal kein Element von F_p sind.
Man muss sich aber bewusst sein, dass die Zahlen p, $2p$, $3p$ etc. in F_p aber weiterhin der 0 entsprechen und demzufolge keine multiplikativ Inversen besitzen.
Wir untersuchen zunächst immer das LGS in F_p. Da wir für die Umformungen des LGS nur das Additionsverfahren verwendet haben, d.h. wir haben Vielfache einer Zeile auf eine andere addiert, sind die Umformungen auch in jedem F_p gültig und Äquivalenzumformungen.
Selbst wenn wir beispielsweise eine Umformung der Form $2 \cdot I + II \to II$ über dem Körper F_2 durchführen, so bedeutet dies lediglich, dass eigentlich $0 \cdot I + II \to II$ durchgeführt wird, d.h. keine Veränderung zum vorherigen LGS geschieht.
Sollte lineare Abhängigkeit auftreten, so analysieren wir die gegebenen Vektoren nochmal genauer, indem wir sie nur mit Elementen von F_p ausdrücken. Formal muss die Untersuchung mit dem LGS (um auf eine Idee zu kommen) nicht Teil der Lösung sein, wenn man schon den Verdacht von linearer Abhängigkeit hat.
Da bei den Umformungen in (a) keine multiplikativ Inversen verwendet wurden, ist obige Äquivalenz auch hier gültig.

- Fall $p \geq 7$. Dann besitzen alle Koeffizienten im LGS I,II,III,IV multiplikativ Inverse und wie in (a) erhalten wir, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis des F_p^4 bildet und somit $U = F_p^4$, $\dim_{F_p}(U) = 4$, Basis von U ist (v_1, v_2, v_3, v_4).

- Fall $p = 5$. Dann gilt: I,II,III ist

$$\begin{array}{rcccccccc} I' & 0 & = & \lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 \\ II' & 0 & = & & & \lambda_2 & & & & \\ III' & 0 & = & & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 \\ IV & 0 & = & & & & & 3\lambda_3 & & \end{array}.$$

  Wie in (a) erhalten wir, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis des F_5^4 bildet und somit $U = F_5^4$, $\dim_{F_5}(U) = 4$, Basis von U ist (v_1, v_2, v_3, v_4).

- Fall $p = 3$. Dann gilt: I,II,III,IV ist

$$\begin{array}{rccccccc} I' & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_3 & + & 2\lambda_4 \\ II' & 0 & = & 0 & & & & \\ III' & 0 & = & 0 & & & & \\ IV' & 0 & = & 0 & & & & \end{array}.$$

  Wähle $\lambda_1 = \lambda_3 = 1$, mit I' folgt $\lambda_4 = -2^{-1}(\lambda_1 + \lambda_3) = 2$.
  $\Rightarrow 0 = v_1 + v_3 + 2v_4$. (*)
  $\Rightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist linear abhängig.
  Genauere Analyse der gegebenen Vektoren: Es gilt

$$v_1 = 2v_3 = v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = 0.$$

  Daher ist $U = \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = \mathrm{Lin}(\{v_1\}) \Rightarrow$ Eine Basis von U ist (v_1), $\dim_{F_3} U = 1$.

- Fall $p = 2$. Dann gilt: I,II,III,IV ist

$$\begin{array}{rccccc} I' & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & 0 & & \\ III' & 0 & = & 0 & & \\ IV' & 0 & = & & & \lambda_3 \end{array}$$

  Mit IV' folgt $\lambda_3 = 0$ und I' liefert $\lambda_1 = 0$, aber $\lambda_2 = \lambda_4$ können frei gewählt werden.
  $\Rightarrow (v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist linear abhängig.
  Genauere Analyse der gegebenen Vektoren: Es gilt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = v_4 = 0.$$

  Offensichtlich sind v_1, v_3 keine Vielfachen voneinander und daher linear unabhängig.
  Damit folgt: $U = \mathrm{Lin}(\{v_1, v_3\})$.
  $\Rightarrow$ Eine Basis von U ist (v_1, v_3), $\dim_{F_2} U = 2$.

Aufgabe P22 (Basen von Folgenräumen).

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellwertigen Folgen über $\mathbb{R}$ und für $N \in \mathbb{N}$ die Untervektorräume

$$\begin{aligned} U_N &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \geq N : a_n = 0\}, \\ Q_N &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+N}\} \end{aligned}$$

der Folgen, welche ab Stelle N Null sind, sowie den Raum der N-periodischen Folgen. Für $i \in \mathbb{N}$ definiere die Folge $e^{(i)} = (e_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch

$$e_n^{(i)} := \begin{cases} 1, & n = i, \\ 0, & n \neq i, \end{cases}$$

und die Folge $g^{(i)} = (g_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch

$$g_n^{(i)} := \begin{cases} 1, & n \leq i, \\ 0, & n > i \end{cases}.$$

Die Aufgaben (a) - (e) beschäftigen sich nur mit U_N. Zeigen Sie:

(a) $(e^{(1)}, ..., e^{(N-1)})$ ist ein Erzeugendensystem von U_N.

(b) $(g^{(1)}, ..., g^{(N-1)})$ ist linear unabhängig.

(c) $\dim_{\mathbb{R}}(U_N) = N - 1$.

(d) Sei nun

$$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \exists N \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_N\}$$

der Raum aller abbrechenden Folgen. Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}}(U) = \infty$.

(e) Geben Sie eine Basis von U an.

(f) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}}(Q_N) = N$.

Lösung:

(a) Zu zeigen ist $U_N = \mathrm{Lin}(\{e^{(1)}, ..., e^{(N-1)}\})$.
„$\supset$“: Klar, da $\{e^{(1)}, ..., e^{(N-1)}\} \subset U_N$ und U_N UVR.
„$\subset$“: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_N$.
Wir zeigen, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{N-1} a_k e^{(k)} \in \mathrm{Lin}(\{e^{(1)}, ..., e^{(N-1)}\})$.
Beweis: Es gilt für $n \geq N$:

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k \underbrace{e_n^{(k)}}_{=0 \text{ (Def. } e^{(k)})} = 0 \overset{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_N}{=} a_n.$$

Für $n \in \{1, ..., N-1\}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{N-1} a_k \underbrace{e_n^{(k)}}_{=\begin{cases} 1, n = k \\ 0, n \neq k \end{cases}} = a_n \cdot e_n^{(n)} = a_n.$$

Damit ist gezeigt: Für alle $n \in \mathbb{N}$: $\left(\sum_{k=1}^{N-1} a_k e^{(k)}\right)_n = a_n$, d.h. $\sum_{k=1}^{N-1} a_k e^{(k)} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) *Anmerkung (didaktisch): Natürlich wäre es sinnvoller, Unabhängigkeit von $(e^{(1)}, ..., e^{(N-1)})$ zu zeigen. In Hinsicht auf die Lösung von (c) soll hier aber ausdrücklich die Unabhängigkeit von einer anderen Familie von Vektoren gezeigt werden.*
Seien $\lambda_1, ..., \lambda_{N-1} \in \mathbb{R}$ mit $\sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g^{(k)} = 0$.
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g_n^{(k)} = 0$.

- Möglichkeit 1 (elementar): Einsetzen von $n = 1, ..., N-1$ liefert:
  (1) $0 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g_1^{(k)} = \lambda_1 + ... + \lambda_{N-1}$
  (2) $0 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g_2^{(k)} = \lambda_2 + ... + \lambda_{N-1}$
  ...
  (N-2) $0 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g_{N-2}^{(k)} = \lambda_{N-2} + \lambda_{N-1}$
  (N-1) $0 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g_{N-1}^{(k)} = \lambda_{N-1}$
  $\overset{(N-1)}{\Rightarrow} \lambda_{N-1} = 0 \overset{(N-2)}{\Rightarrow} \lambda_{N-2} = 0 \Rightarrow ... \overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0.$
- Möglichkeit 2 (mit umgekehrter Induktion): Wir zeigen, dass für $n = N-1, ..., 1$ gilt: $\lambda_n = 0$.
  Induktionsanfang: ($n = N-1$): $0 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g_{N-1}^{(k)} = \lambda_{N-1}$.
  Induktionsschritt ($n \to n-1$): Es gelte $\lambda_{N-1} = ... = \lambda_n = 0$ (IV). Dann ist

  $$0 = \sum_{k=1}^{N-1} \lambda_k g_{n-1}^{(k)} = \lambda_{n-1} + \lambda_n + ... + \lambda_{N-1} \overset{IV}{=} \lambda_{N-1},$$

  d.h. $\lambda_{n-1} = 0$.

(c) Austauschsatz und (a) $(e^{(1)}, ..., e^{(N-1)})$ linear unabhängig $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U_N \geq N-1$.
Basisauswahlsatz und (a) $(g^{(1)}, ..., g^{(N-1)})$ Erzeugendensystem von $U_N \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U_N \leq N-1$.
$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U_N = N-1$.

(d) Angenommen, $R := \dim_{\mathbb{R}} U < \infty$.
$\Rightarrow$ Alle Basen haben Länge R. Aber: $(e^{(1)}, ..., e^{(R+1)})$ sind linear unabhängig in $U_{R+2} \subset U$.
Austauschsatz $\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} U \geq R+1$, Widerspruch.

(e) Wir zeigen: $(e^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ ist Basis von U. Wir nutzen, dass aus (c) folgt: $(e^{(1)}, ..., e^{(N-1)})$ ist Basis von U_N.

- $(e^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ ist Erzeugendensystem, denn:
  Sei $f \in U$
  $\Rightarrow$ Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $f \in U_N$
  $\overset{(e^{(1)}, ..., e^{(N-1)}) \text{ Erzeugendensystem von } U_N}{\Rightarrow}$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_{N-1} \in \mathbb{R}$ mit $f = \lambda_0 e^{(1)} + ... + \lambda_{N-1} e^{(N-1)} \in \mathrm{Lin}(\{e^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}})$.
- $(e^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ ist linear unabhängig, denn:
  Sei $J \subset \mathbb{N}$ endliche Teilmenge, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ $(j \in J)$ mit $\sum_{j \in J} \lambda_j e^{(j)} = 0$.
  J endlich $\Rightarrow$ Es gibt $N \in \mathbb{N}$ mit $J \subset \{1, ..., N-1\}$.
  $\overset{(e^{(1)}, ..., e^{(N-1)}) \text{ linear unabhängig}}{\Rightarrow} \lambda_j = 0$ $(j \in J)$.

(f) Eine Basis von Q_N ist gegeben durch $(h^{(1)}, ..., h^{(N)})$, wobei

$$h_n^{(i)} := \begin{cases} 1, & n = k \cdot N + i \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis:

- $(h^{(1)}, ..., h^{(N)})$ ist linear unabhängig, denn:
  Seien $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 h^{(1)} + ... + \lambda_N h^{(N)} = 0$.

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : \lambda_1 h_n^{(1)} + ... + \lambda_N h_n^{(N)} = 0$
Einsetzen von $n \in \{1, ..., N\}$ liefert:

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \underbrace{h_n^{(k)}}_{=\begin{cases}1, k = n\\ 0, k \neq n\end{cases}} = \lambda_n,$$

d.h. insgesamt $\lambda_1 = ... = \lambda_N = 0$.

- $(h^{(1)}, ..., h^{(N)})$ ist Erzeugendensystem von Q_N, d.h. $Q_N = \mathrm{Lin}(\{h^{(1)}, ..., h^{(N)}\})$, denn:
„$\subset$“: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Q_N$ beliebig. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig, und $k, i \in \mathbb{N}_0$ so dass $n = k \cdot N + i$ mit $i \in \{1, ..., N\}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \underbrace{h_n^{(k)}}_{=\begin{cases}1, k = i\\ 0, k \neq i\end{cases}} = a_i \overset{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\in Q_N}{=} a_{k\cdot N+i} = a_n,$$

d.h. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=1}^{N} a_k h^{(k)} \in \mathrm{Lin}(\{h^{(1)}, ..., h^{(N)}\})$.
„$\supset$“: Klar, da $\{h^{(1)}, ..., h^{(N)}\} \subset Q_N$ und Q_N UVR.

Da $(h^{(1)}, ..., h^{(N)})$ Basis von Q_N, ist $\dim_{\mathbb{R}}(Q_N) = N$.

Aufgabe P23 (Beweise mit Dimensionen von Vektorräumen).
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $U, W \subset V$ Untervektorräume.

(a) Es gelte $\dim_K(U) = \dim_K(W) = n$ und $\dim_K(U \cap W) = 1$. Zeigen Sie: $\dim_K(V) \geq 2n - 1$.

Es gelte nun $\dim_K(V) = n$.

(b) Es gelte $\dim_K(U) = n-2$. Zeigen Sie, dass es zwei Untervektorräume U_1, U_2 von V mit $\dim_K(U_1) = \dim_K(U_2) = n - 1$ gibt mit $U = U_1 \cap U_2$.

(c) Zeigen Sie: Es gilt $\dim_K(U + W) \leq \dim_K U + \dim_K W$ mit Gleichheit genau dann, wenn $U \cap W = \{0\}$.

Lösung:

(a) Sei (v_1) eine Basis von $U \cap W$.
Basisgänzungssatz $\Rightarrow$ Es gibt Basis $(v_1, ..., v_n)$ von U und Basis $(v_1, v_2', ..., v_n')$ von W.
Wir wollen zeigen: $B = (v_1, v_2, ..., v_n, v_2', ..., v_n')$ ist linear unabhängig. (Dann folgt mit Austauschsatz $\Rightarrow \dim_K(V) \geq 2n - 1$).

Beweis: Seien $\alpha_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, \mu_2, ..., \mu_n \in K$ mit

$$\alpha_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n + \mu_2 v_2' + ... + \mu_n v_n' = 0. \quad (*)$$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = -\mu_2 v_2' - ... - \mu_n v_n'$.
Rechte Seite ist in W, linke Seite in U $\Rightarrow$ Beide Seiten in $U \cap W$.

$\overset{(v_1) \text{ Basis von } U \cap W}{\Rightarrow}$ Es gibt $\beta_1 \in K$ mit $\alpha_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = \beta_1 v_1$.
$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n = 0$
$\overset{(v_1,...,v_n) \text{ Basis von } U}{\Rightarrow} \quad \alpha_1 - \beta_1 = 0, \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0.$
$(*) \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \mu_2 v_2' + ... + \mu_n v_n' = 0$
$\overset{(v_1, v_2' ..., v_n') \text{ Basis von } W}{\Rightarrow} \quad \alpha_1 = \mu_2 = ... = \mu_n = 0.$
$\Rightarrow \alpha_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = \mu_2 = ... = \mu_n = 0.$

(b) Sei $(v_1, ..., v_{n-2})$ eine Basis von U.
Basisergänzungssatz $\Rightarrow$ Es gibt Basis $(v_1, ..., v_{n-2}, v_{n-1}, v_n)$ von V.
Definiere $U_1 := \mathrm{Lin}(v_1, ..., v_{n-2}, v_{n-1})$ und $U_2 := \mathrm{Lin}(v_1, ..., v_{n-2}, v_n)$.
Wir zeigen: $U_1 \cap U_2 = \mathrm{Lin}(v_1, ..., v_{n-2})$ (*).
(Dann folgt: $U_1 \cap U_2 = \mathrm{Lin}(v_1, ..., v_{n-2}) \overset{(v_1,...,v_{n-2}) \text{ Basis von } U}{=} U$).

Beweis von (*):
„$\supseteq$“: Offensichtlich gilt $v_1, ..., v_{n-2} \in U_i$ $(i = 1, 2)$, d.h. $\{v_1, ..., v_{n-2}\} \subset U_1 \cap U_2 \Rightarrow$ $\mathrm{Lin}(v_1, ..., v_{n-2}) \subset \mathrm{Lin}(U_1 \cap U_2) \overset{U_1,U_2 \text{ UVR + Schnitt UVR wieder UVR}}{=} U_1 \cap U_2$.
„$\subseteq$“: Sei $x \in U_1 \cap U_2$
$(v_1, ..., v_{n-1})$ Basis von U_1 und $(v_1, ..., v_{n-2}, v_n)$ Basis von $U_2 \Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_n \in K$ mit

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{n-2} v_{n-2} + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0 \cdot v_n \\ &= \mu_1 v_1 + ... + \mu_{n-2} v_{n-2} + 0 \cdot v_{n-1} + \mu_n v_n \end{aligned}$$

Das heißt, wir haben 2 verschiedene Darstellungen für x.
$(v_1, ..., v_n)$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Darstellung von x mittels $(v_1, ..., v_n)$ ist eindeutig.
$\Rightarrow \mu_n = 0$, $\lambda_{n-1} = 0 \Rightarrow x = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{n-2} v_{n-2}$, d.h. $x \in \mathrm{Lin}(v_1, ..., v_{n-2})$.

(c)
- Beweis Ungleichung: Sei $(b_1, ..., b_r)$ eine Basis von U, $(b_1', ..., b_s')$ eine Basis von W. Dann gilt: $(b_1, ..., b_r, b_1', ..., b_s')$ ist Erzeugendensystem von $U+W$, denn (vgl. Lösung Aufgabe 19(a)):

  Ist $v \in U + W$, so gibt es $u \in U$, $w \in W$ mit $v = u + w$.
  $u \in U \overset{(b_1,...,b_r) \text{ Basis von } U}{\Rightarrow}$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ mit $u = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r$.
  $w \in W \overset{(b_1',...,b_s') \text{ Basis von } W}{\Rightarrow}$ Es gibt $\mu_1, ..., \mu_s \in K$ mit $u = \mu_1 b_1' + ... + \mu_s b_s'$.
  $\Rightarrow v = u + w = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r + \mu_1 b_1' + ... + \mu_s b_s' \in \mathrm{Lin}(\{b_1, ..., b_r, b_1', ..., b_s'\})$.

  Da $(b_1, ..., b_r, b_1', ..., b_s')$ Erzeugendensystem von $U+W \overset{\text{Basisauswahlsatz}}{\Rightarrow} \dim_K(U+W) \leq r + s = \dim_K U + \dim_K W$.
- Zu zeigen: $\dim_K U + \dim_K W = \dim_K(U + W) \Leftrightarrow U \cap W = \{0\}$.

  - „$\Leftarrow$“: Falls $U \cap W = \{0\}$, so wurde bereits in Aufgabe 19(a) gesehen, dass $(b_1, ..., b_r, b_1', ..., b_s')$ sogar Basis ist.
    $\Rightarrow \dim_K(U + W) = r + s = \dim_K U + \dim_K W$.

  - „$\Rightarrow$“: Wissen bereits: $(b_1, ..., b_r, b_1', ..., b_s')$ Erzeugendensystem von $U + W$.
    $\dim_K(U + W) = \dim_K U + \dim_K W = r + s \Rightarrow (b_1, ..., b_r, b_1', ..., b_s')$ Basis von $U + W$.
    $\Rightarrow (b_1, ..., b_r, b_1', ..., b_s')$ linear unabhängig.
    Wir zeigen nun $U \cap W = \{0\}$.

* „$\supset$“: klar, da $U \cap W$ UVR.
* „$\subset$“: Sei $x \in U \cap W$.
  $(b_1, ..., b_r)$ Basis von $U \Rightarrow$ Es gibt $\lambda_1, ..., \lambda_r \in K$ mit $x = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r$.
  $(b'_1, ..., b'_s)$ Basis von $W \Rightarrow$ Es gibt $\mu_1, ..., \mu_s \in K$ mit $x = \mu_1 b'_1 + ... + \mu_s b'_s$.
  $\Rightarrow \mu_1 b'_1 + ... + \mu_s b'_s = x = \lambda_1 b_1 + ... + b_r \lambda_r$
  $\Rightarrow \mu_1 b'_1 + ... + \mu_s b'_s - \lambda_1 b_1 - ... - b_r \lambda_r = 0$
  $\overset{(b_1, ..., b_r, b'_1, ..., b'_s) \text{ linear unabh.}}{\Rightarrow} \lambda_1 = ... = \lambda_r = \mu_1 = ... = \mu_s = 0$
  $\Rightarrow x = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_r b_r = 0$.

Aufgabe P24 (Rechnen mit Matrizen).

Berechnen Sie die folgenden Produkte und Summen von Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, sofern sie definiert sind:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}^{86}$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot (-4) + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) & 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog erhalten wir, dass

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -8\\ -1 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 2 + 6\cdot(-1) & 3\cdot(-8)+6\cdot 4\\ 2\cdot 2+4\cdot(-1) & 2\cdot(-8)+4\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix}2 & -8\\ -1 & 4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 3+(-8)\cdot 2 & 2\cdot 6+(-8)\cdot 4\\ -1\cdot 3+4\cdot 2 & -1\cdot 6+4\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-10 & -20\\ 5 & 10\end{pmatrix}$$

Wir sehen, dass der Ring der Matrizen zusammen mit der Matrixmultiplikation im Allgemeinen weder nullteilerfrei noch kommutativ ist.

(c) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2+1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\end{pmatrix}$ und

$$\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 1 & 2\cdot 1 & 2\cdot(-1)\\ -1\cdot 1 & -1\cdot 1 & -1\cdot(-1)\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

(d) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & -3\\ -4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Die Multiplikation $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ist nicht definiert.

(e) Definiere $A = \begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ 15 & -9 & 6\\ 10 & -6 & 4\end{pmatrix}$. Dann gilt $A^2 = 0$, weswegen $A^{86} = 0$ folgt.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`