UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

6. Präsenzblatt

Aufgabe P21 (Dimensionen von Vektorräumen über verschiedenen Körpern).

Für einen Körper K sollen die im Folgenden auftretenden ganzen Zahlen in dem Sinne als Körperelemente aufgefasst werden, dass sie angeben, wie oft $1 \in K$ aufsummiert wird.
Wir definieren die folgenden Vektoren des K-Vektorraums K^4:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \\ 0 \\ -24 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sei $U := \mathrm{Lin}(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$ und $W := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in K^4 : x_1 + 2x_2 = 0, x_1 - x_3 = 0\}$.

(a) Sei $K = \mathbb{Q}$. Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}}(U)$, $\dim_{\mathbb{Q}}(W)$ und jeweils eine Basis von U, W.

(b) Sei $K = F_p$. Bestimmen Sie $\dim_{F_p}(U)$ und eine Basis von U für alle Primzahlen p.

Aufgabe P22 (Basen von Folgenräumen).

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der reellwertigen Folgen über $\mathbb{R}$ und für $N \in \mathbb{N}$ die Untervektorräume

$$\begin{aligned} U_N &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \geq N : a_n = 0\}, \\ Q_N &:= \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a_{n+N}\} \end{aligned}$$

der Folgen, welche ab Stelle N Null sind, sowie den Raum der N-periodischen Folgen. Für $i \in \mathbb{N}$ definiere die Folge $e^{(i)} = (e_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch

$$e_n^{(i)} := \begin{cases} 1, & n = i, \\ 0, & n \neq i, \end{cases}$$

und die Folge $g^{(i)} = (g_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch

$$g_n^{(i)} := \begin{cases} 1, & n \leq i, \\ 0, & n > i \end{cases}.$$

Die Aufgaben (a) - (e) beschäftigen sich nur mit U_N. Zeigen Sie:

(a) $(e^{(1)}, ..., e^{(N-1)})$ ist ein Erzeugendensystem von U_N.

(b) $(g^{(1)}, ..., g^{(N-1)})$ ist linear unabhängig.

(c) $\dim_{\mathbb{R}}(U_N) = N - 1$.

(d) Sei nun

$$U := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \exists N \in \mathbb{N} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U_N\}$$

der Raum aller abbrechenden Folgen. Zeigen Sie: $\dim_{\mathbb{R}}(U) = \infty$.

(e) Geben Sie eine Basis von U an.

(f) Zeigen Sie, dass $\dim_{\mathbb{R}}(Q_N) = N$.

Aufgabe P23 (Beweise mit Dimensionen von Vektorräumen).
Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und V ein Vektorraum über einem Körper K. Seien $U, W \subset V$ Untervektorräume.

(a) Es gelte $\dim_K(U) = \dim_K(W) = n$ und $\dim_K(U \cap W) = 1$. Zeigen Sie: $\dim_K(V) \geq 2n - 1$.

Es gelte nun $\dim_K(V) = n$.

(b) Es gelte $\dim_K(U) = n-2$. Zeigen Sie, dass es zwei Untervektorräume U_1, U_2 von V mit $\dim_K(U_1) = \dim_K(U_2) = n - 1$ gibt mit $U = U_1 \cap U_2$.

(c) Zeigen Sie: Es gilt $\dim_K(U+W) \leq \dim_K U + \dim_K W$ mit Gleichheit genau dann, wenn $U \cap W = \{0\}$.

Aufgabe P24 (Rechnen mit Matrizen).
Berechnen Sie die folgenden Produkte und Summen von Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, sofern sie definiert sind:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 15 & -9 & 6 \\ 10 & -6 & 4 \end{pmatrix}^{86}$

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`