Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

5. Präsenzblatt - Lösungen

Aufgabe P17 (Lineare Unabhängigkeit in verschiedenen Vektorräumen).

Untersuchen Sie die folgenden Mengen von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im angegebenen Vektorraum.

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ im Standard-Vektorraum F_5^3 über F_5.

(b) Die Abbildungen $f_1, ..., f_4$ mit $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 3x + 2$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x + 2)^2$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^\mathbb{R}$.

(c) $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := n \cdot (n - 1), \qquad b_n := (n - 1) \cdot (n - 2), \qquad c_n := n \cdot (n - 2)$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Die Vektoren sind linear abhängig (im $\mathbb{R}$-VR $\mathbb{R}^3$ wären sie aber linear unabhängig), denn:

Ansatz (muss nicht Bestandteil der Lösung sein): Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in F_5$ mit

$$0 = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

d.h. löse das LGS (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{array}{llcccccc} I & 0 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II & 0 & = & 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 \\ III & 0 & = & 3\lambda_1 & + & \lambda_2 & & \end{array}$$

$$\overset{(-2)\cdot I+II\to II, (-3)\cdot I+III\to III}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{llcccccc} I & 0 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & & & 4\lambda_2 & + & 4\lambda_3 \\ III' & 0 & = & & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}$$

II' und III' sind äquivalent, daher genügt es I und III' zu betrachten. Eine Lösung ist $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1 = 4$, und (Einsetzen in I): $\lambda_1 = 2$.

es gilt

$$0 = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$$

(b) Die Vektoren f_1, f_2, f_3 sind linear abhängig, denn:

- *Ansatz 1: Konstruiere Linearkombination sukzessive. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} f_4(x) = x^2 + 4x + 4 \;&\Rightarrow\; f_4(x) - f_3(x) = 4x + 4 \\ &\Rightarrow\; f_4(x) - f_3(x) - 2f_2(x) = -2x \\ &\Rightarrow\; f_4(x) - f_3(x) - 2f_2(x) + f_1(x) = 0. \end{aligned}$$

- *Ansatz 2: Konstruiere Linearkombination per Gleichungssystem / Koeffizientenvergleich. Gesucht sind $\lambda_1, ..., \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit*

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) \\ &= x^2 \cdot (\lambda_3 + \lambda_4) + x \cdot (2\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_4) + 1 \cdot (2\lambda_2 + 4\lambda_4), \end{aligned}$$

  d.h. zu lösen ist das LGS

$$\begin{array}{lcccccccc} I & 0 & = & & & & \lambda_3 & + & \lambda_4 \\ II & 0 & = & 2\lambda_1 & + & 3\lambda_2 & & + & 4\lambda_4 \\ III & 0 & = & & & 2\lambda_2 & & + & 4\lambda_4 \end{array}$$

  Wähle $\lambda_4 = 1$ (beliebig), dann folgt mit I: $\lambda_3 = -1$, mit III: $\lambda_2 = -2$, mit II: $\lambda_1 = 1$.

es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f_4(x) - f_3(x) - 2f_2(x) + f_1(x) = 0,$$

d.h.

$$f_4 - f_3 - 2f_2 + f_1 = 0.$$

(c) Die Vektoren $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ sind linear unabhängig, denn: Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ mit

$$\lambda_1 \cdot \sqrt{3} + \lambda_2 \cdot \sqrt{5} = 0 \quad (*)$$

- Fall 1: $\lambda_2 \neq 0$. Dann gilt $-\sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{Q}$ (da $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Q}$), Widerspruch. Also kann dieser Fall nicht eintreten.
- Fall 2: $\lambda_2 = 0$. Dann folgt aus (*) direkt $\lambda_1 \cdot \sqrt{3} = 0$, d.h. $\lambda_1 = 0$.

Wir haben gezeigt: Jeder Fall ist entweder nicht möglich oder führt zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

(d) Die Vektoren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind linear unabhängig, denn:
Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ beliebig mit

$$0 = \lambda_1 (a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_2 (b_n)_{n\in\mathbb{N}} + \lambda_3 (c_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

d.h.

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad 0 = \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n + \lambda_3 c_n.$$

Wähle $n = 1 \Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot (-1) \Rightarrow \lambda_3 = 0$.
Wähle $n = 2 \Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$.
Wähle $n = 3 \Rightarrow 0 = \lambda_1 \cdot 6 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 3 \overset{\lambda_1=\lambda_3=0}{=} 2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.
Insgesamt folgt: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Aufgabe P18 (Lineare Unabhängigkeit und Basen im $\mathbb{R}^n$).
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gegeben seien Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch

$$v_1 := (1 + \alpha, 2), \qquad v_2 := (1, 2 + \alpha).$$

(a) Ermitteln Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Vektoren v_1, v_2 linear unabhängig sind.

Gegeben seien nun Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$w_1 := (1,1,1), \qquad w_2 := (1,3,2), \qquad w_3 := (0,2,2), \qquad w_4 := (1,-1,1).$$

Sei $U_1 := \mathrm{Lin}(\{w_1, w_2\})$ und $U_2 := \mathrm{Lin}(\{w_3, w_4\})$.

(b) Zeigen Sie, dass (w_1, w_2, w_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, indem Sie die charakterisierenden Eigenschaften (Erzeugendensystem und linear unabhängig) nachrechnen.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Lösung:

(a) Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2.$$

Dies ist äquivalent zum LGS (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{array}{lcccc} (I) & 0 & = & (1+\alpha)\lambda_1 & + & \lambda_2 \\ (II) & 0 & = & 2\lambda_1 & + & (2+\alpha)\lambda_2 \end{array}$$

$$\overset{-(2+\alpha)\cdot I + II \to II}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lcccc} (I) & 0 & = & (1+\alpha)\lambda_1 & + & \lambda_2 \\ (II') & 0 & = & [2-(1+\alpha)(2+\alpha)]\lambda_1 & & \end{array}$$

Betrachte Gleichung (II').

- Fall 1: $0 = 2 - (1+\alpha)(2+\alpha) \Longleftrightarrow \alpha^2 + 3\alpha = 0$, d.h. $\alpha \in \{0, -3\}$. Dann ist (II') erfüllt für beliebiges $\lambda_1 \in \mathbb{R}$.
  Wähle zum Beispiel $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \overset{(I)}{=} -(1+\alpha)$. Dann gilt $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$, aber $(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0$.
  In diesem Fall sind v_1, v_2 also linear abhängig.
- Fall 2: $0 \neq 2 - (1+\alpha)(2+\alpha)$, d.h. $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,-3\} \overset{(II')}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0 \overset{(I)}{\Rightarrow} \lambda_2 = 0$.
  In diesem Fall sind v_1, v_2 also linear unabhängig.

(b)
- (w_1, w_2, w_3) ist ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, denn: Sei $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ beliebig. Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$(x,y,z) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3,$$

Dies ist äquivalent zum LGS (Lineares Gleichungssystem)

$$\begin{array}{lccccccc} (I) & x & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \\ (II) & y & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ (III) & z & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{(-1)\cdot I + II \to II, (-1)\cdot I + III \to III}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccccc} (I) & x & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \\ (II') & y-x & = & & & 2\lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ (III') & z-x & = & & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{(-2)\cdot III + II \to II}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccccc} (I) & x & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \\ (II'') & y+x-2z & = & & & & - & 2\lambda_3 \\ (III') & z-x & = & & & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{II'' + III' \to III'}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccccc} (I) & x & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \\ (II'') & y+x-2z & = & & & & - & 2\lambda_3 \\ (III'') & y-z & = & & & \lambda_2 & & \end{array}$$

$$\overset{(-1)\cdot III'' + I \to I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccccc} (I') & x+z-y & = & \lambda_1 & & & & \\ (II'') & y+x-2z & = & & & & - & 2\lambda_3 \\ (III'') & y-z & = & & & \lambda_2 & & \end{array}$$

Wähle also $\lambda_1 = x + z - y$, $\lambda_2 = y - z$, $\lambda_3 = z - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$, dann gilt

$$(x, y, z) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3.$$

- (w_1, w_2, w_3) ist linear unabhängig, denn: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3.$$

  Dies ist äquivalent zum LGS oben mit $x = y = z = 0$. Oben wurde bereits gezeigt, dass die einzige Lösung durch $\lambda_1 = x + z - y = 0$, $\lambda_2 = y - z = 0$ und $\lambda_3 = z - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 0$ gegeben ist.

(c) Wir zeigen: $U_1 \cap U_2 = \mathrm{Lin}((-1, 3, 1))$ (*). Eine Basis ist dann automatisch durch $((-1, 3, 1))$ gegeben, da ein Vektor ungleich dem Nullvektor linear unabhängig ist.
Beweis von (*): „$\subset$“ (dient auch als Herleitung der Vermutung (*)): Sei $x \in U_1 \cap U_2$. Dann gilt: Es gibt $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \mu_1 w_3 + \mu_2 w_4.$$

Wir erhalten folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccccccc}
(I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & - & \mu_2 \\
(II) & 0 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 & - & 2\mu_1 & + & \mu_2 \\
(III) & 0 & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2 & - & 2\mu_1 & - & \mu_2
\end{array}$$

$$\overset{(-1)\cdot I + II \to II, (-1)\cdot I + III \to III}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccccccc}
(I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & - & \mu_2 \\
(II') & 0 & = & & & 2\lambda_2 & - & 2\mu_1 & + & 2\mu_2 \\
(III') & 0 & = & & & \lambda_2 & - & 2\mu_1 & &
\end{array}$$

$$\overset{(-2)\cdot III' + II' \to II'}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccccccc}
(I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & & - & \mu_2 \\
(II'') & 0 & = & & & & & 2\mu_1 & + & 2\mu_2 \\
(III') & 0 & = & & & \lambda_2 & - & 2\mu_1 & &
\end{array}$$

Aus (II”) folgt: $\mu_2 = -\mu_1$, d.h. $x = \mu_1 \cdot (w_3 - w_4) = \mu_1 \cdot (-1, 3, 1) \in \mathrm{Lin}((-1, 3, 1))$.
„$\supset$“: Sei $x \in \mathrm{Lin}((-1, 3, 1))$, d.h. es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2, x_3) = x = \lambda \cdot (-1, 3, 1)$.
Dann gilt $x \in U_2$, denn: Wir haben bereits in „$\subset$“ gesehen, dass $(-1, 3, 1) = w_3 - w_4$
$\Rightarrow x = \lambda \cdot (-1, 3, 1) = \lambda w_3 - \lambda w_4 \in \mathrm{Lin}(\{w_3, w_4\}) = U_2$.
Es gilt auch $x \in U_1$, denn:

Ansatz: Suche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$(-1, 3, 1) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2,$$

d.h. löse das LGS

$$\begin{array}{lccccc}
(I) & -1 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 \\
(II) & 3 & = & \lambda_1 & + & 3\lambda_2 \\
(III) & 1 & = & \lambda_1 & + & 2\lambda_2
\end{array}$$

$$\overset{(-1)\cdot I + II \to II, (-1)\cdot I + III \to III}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{lccccc}
(I) & -1 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 \\
(II') & 4 & = & & & 2\lambda_2 \\
(III') & 2 & = & & & \lambda_2
\end{array}$$

(II') und (III') sind äquivalent; also betrachte nur (I) und (III'). Aus (III') folgt $\lambda_2 = 2$, eingesetzt in (I) folgt $\lambda_1 = -1 - \lambda_2 = -3$.

es gilt $x = \lambda \cdot (-1, 3, 1) = \lambda \cdot (-3 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2) = -3\lambda \cdot w_1 + 2\lambda w_2 \in \mathrm{Lin}(\{w_1, w_2\}) = U_1$.

Aufgabe P19 (Beweise mit linearer Unabhängigkeit und Basen).

Sei K ein Körper. Wir betrachten für $n, m \in \mathbb{N}$ die Standardvektorräume K^n mit Basis $B_1 = (b_1, ..., b_n)$ und K^m mit Basis $B_2 = (b'_1, ..., b'_m)$.

(a) Zeigen Sie, dass $B := ((b_1, 0_{K^m}), ..., (b_n, 0_{K^m}), (0_{K^n}, b'_1), ..., (0_{K^n}, b'_m))$ eine Basis des Vektorraumes K^{n+m} bildet.

Sei nun $K = \mathbb{R}$ und V ein K-Vektorraum mit Basis (a_1, a_2, a_3).

(b) Wir definieren

$$b_1 := a_1 + a_2, \qquad b_2 := a_1 + a_3, \qquad b_3 := 3a_1 + 2a_2 + a_3, \qquad b_4 := a_2 + a_3.$$

Überprüfen Sie, ob (b_1, b_2, b_3) oder (b_1, b_2, b_4) linear unabhängig sind.

Lösung:

(a) Wir weisen die Eigenschaften einer Basis nach. Im Folgenden schreiben wir verkürzt 0 anstelle des Nullvektors in den jeweiligen Vektorräumen K^n, K^m, K^{m+n}.

- **Lineare Unabhängigkeit**: Seien $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_m \in K$ mit

$$\lambda_1(b_1, 0) + ... + \lambda_n(b_n, 0) + \mu_1(0, b'_1) + ... + \mu_m(0, b'_m) = 0.$$

$\longrightarrow \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n + \mu_1 \cdot 0 + ... + \mu_m \cdot 0 = 0$ und $\lambda_1 \cdot 0 + ... + \lambda_n \cdot 0 + \mu_1 \cdot b'_1 + ... + \mu_m \cdot b'_m = 0$
$\Longrightarrow \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n = 0$ und $\mu_1 b'_1 + ... + \mu_m b'_m = 0$. Da B_1 eine Basis des K^n ist, folgt $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.
Da B_2 eine Basis des K^m ist, folgt $\mu_1 = ... = \mu_m = 0$.

- **Erzeugendensystem**: Sei $v \in K^{m+n}$.
Schreibe $v = (x, y)$ mit $x \in K^n$ und $y \in K^m$.
Da B_1 eine Basis ist, existieren $\lambda_1, ..., \lambda_n \in K$ mit $x = \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_n b_n$.
Da B_2 eine Basis ist, existieren $\mu_1, ..., \mu_m \in K$ mit $y = \mu_1 b'_1 + ... + \mu_m b'_m$.
Es folgt:

$$v = (x, y) = \lambda_1(b_1, 0) + ... + \lambda_n(b_n, 0) + \mu_1(0, b'_1) + ... + \mu_m(0, b'_m) \in \mathrm{Lin}(B).$$

(b)
- (b_1, b_2, b_3) ist linear abhängig, denn:
Ansatz: Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0_V$.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Einsetzen}}{\Longrightarrow} & \lambda_1(a_1 + a_2) + \lambda_2(a_1 + a_3) + \lambda_3(3a_1 + 2a_2 + a_3) &= 0_V \\ &\Longrightarrow & (\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)a_1 + (\lambda_1 + 2\lambda_3)a_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)a_3 &= 0_V \end{aligned}$$

$\overset{(a_1, a_2, a_3)\ \text{Basis}}{\Longrightarrow}$ *(I)* $\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$, *(II)* $\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$, *(III)* $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$.
Dieses LGS ist äquivalent zu

$$\begin{array}{rccccccc} (I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 \\ (II) & 0 & = & \lambda_1 & & & + & 2\lambda_3 \\ (III) & 0 & = & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{I\cdot(-1)+II \to II}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{rccccccc} (I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 \\ (II') & 0 & = & & - & \lambda_2 & - & \lambda_3 \\ (III) & 0 & = & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 \end{array}$$

(II') und (III) sind äquivalent, betrachte nur (I) und (III). Wähle $\lambda_3 = 1$, dann folgt mit (III): $\lambda_2 = -\lambda_3 = -1$. Mit (I) folgt $\lambda_1 = -\lambda_2 - 3\lambda_3 = -2$.
es gilt $-2 \cdot b_1 - b_2 + b_3 = 0$.

- (b_1, b_2, b_4) ist linear unabhängig, denn:
  Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in K$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_4 = 0_V$.

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Einsetzen}}{\Longrightarrow} & \lambda_1(a_1+a_2) + \lambda_2(a_1+a_3) + \lambda_3(a_2+a_3) &= 0_V \\ &\Longrightarrow & (\lambda_1+\lambda_2)a_1 + (\lambda_1+\lambda_3)a_2 + (\lambda_2+\lambda_3)a_3 &= 0_V \end{aligned}$$

  $\overset{(a_1,a_2,a_3)\text{ Basis}}{\Longrightarrow}$ (I) $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, (II) $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, (III) $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$.
  Dieses LGS ist äquivalent zu

$$\begin{array}{lcclclcl} (I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \\ (II) & 0 & = & \lambda_1 & & & + & \lambda_3 \\ (III) & 0 & = & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{(-1)\cdot I+II\to II}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcclclcl} (I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \\ (II') & 0 & = & & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 \\ (III) & 0 & = & & & \lambda_2 & + & \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{II'+III\to III}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcclclcl} (I) & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & & \\ (II') & 0 & = & & - & \lambda_2 & + & \lambda_3 \\ (III') & 0 & = & & & & & 2\lambda_3 \end{array}$$

  Aus (III') folgt $\lambda_3 = 0$. Aus (II') folgt dann $\lambda_2 = 0$. Aus (I) folgt dann $\lambda_1 = 0$, d.h. insgesamt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Aufgabe P20 (Polynom-Funktionenraum).
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (vgl. Blatt 4, Aufgabe P16). Für $d \in \mathbb{N}$ sei

$$P := \{p \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | a_0, ..., a_3 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot x^k\}$$

der Untervektorraum der Polynome vom Grad höchstens 3.

(a) Seien $p_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $(i = 0, ..., 3)$ mit

$$p_0(x) := 1, \quad p_1(x) := x, \quad p_2(x) := x^2, \quad p_3(x) := x^3$$

Zeigen Sie, dass $B := (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eine Basis von P bildet.

(b) Seien $h_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ $(i = 0, ..., 3)$ mit

$$h_0(x) := 1, \quad h_1(x) := x, \quad h_2(x) := x \cdot (x-1), \quad h_3(x) := x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

Zeigen Sie, dass auch $B' := (h_0, h_1, h_2, h_3)$ eine Basis von P bildet.

(c) Gesucht seien Polynom $p \in P$ mit $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p(2) = 1$ und $p(3) = 6$. Finden Sie eine Darstellung von p als Linearkombination der Elemente von B'. Warum ist die Basis B' der Basis B für diese Aufgabe vorzuziehen?

Lösung:

(a)
- Zu zeigen: B ist Erzeugendensystem:
  Sei $p \in P$ beliebig.
  $\Rightarrow$ Es gibt $a_0, ..., a_3 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot x^k = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = a_0 \cdot p_0(x) + a_1 \cdot p_1(x) + a_2 \cdot p_2(x) + a_3 \cdot p_3(x)$
  $\Rightarrow p = a_0 \cdot p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3$
  $\Rightarrow p \in \mathrm{Lin}(p_0, p_1, p_2, p_3)$.

- Zu zeigen: B ist linear unabhängig:
  Seien $\lambda_0, ..., \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$0 = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3,$$

  d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$0 = \lambda_0 p_0(x) + \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x^3.$$

  Wähle $x = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 0 + ... + \lambda_3 \cdot 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0.$
  Wähle $x = 1 \Rightarrow 0 = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 1^2 + \lambda_3 \cdot 1^2 \overset{\lambda_0=0}{\Rightarrow} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$
  Wähle $x = -1 \Rightarrow -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0.$
  Wähle $x = 2 \Rightarrow 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0.$
  Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ erhalten wir folgendes LGS:

$$\begin{array}{llcrcrcr} I & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II & 0 & = & -\lambda_1 & + & \lambda_2 & - & \lambda_3 \\ III & 0 & = & 2\lambda_1 & + & 4\lambda_2 & + & 8\lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{I+II\to II, (-2)\cdot I+III\to III}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{llcrcrcr} I & 0 & = & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 \\ II' & 0 & = & & & 2\lambda_2 & & \\ III' & 0 & = & & & 2\lambda_2 & + & 6\lambda_3 \end{array}$$

  II' liefert $\lambda_2 = 0$. Eingesetzt in III' folgt $\lambda_3 = 0$. Eingesetzt in I folgt $\lambda_1 = 0$.
  Insgesamt folgt: $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(b)
- Zu zeigen: B' ist Erzeugendensystem:
  Sei $p \in P$ beliebig.
  $\Rightarrow$ Es gibt $a_0, ..., a_3 \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot x^k = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ (*).

  Ziel: Finde $\lambda_0, ..., \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda_0 h_0(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) + \lambda_3 h_3(x) \\ &= \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x(x-1) + \lambda_3 x(x-1)(x-2) \\ &= \lambda_0 + x(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) + x^2(\lambda_2 - 3\lambda_3) + x^3 \lambda_3. \end{aligned}$$

  Koeffizientenvergleich mit (*) liefert das folgende LGS:

$$\begin{array}{llcccrcrcr} I & a_0 & = & \lambda_0 & & & & & & \\ II & a_1 & = & & & \lambda_1 & - & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 \\ III & a_2 & = & & & & & \lambda_2 & - & 3\lambda_3 \\ IV & a_3 & = & & & & & & & \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{3\cdot IV+III\to III, (-2)\cdot IV+II\to II}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lccccrcrr} I & a_0 & = & \lambda_0 & & & & & \\ II' & a_1 - 2a_3 & = & & & \lambda_1 & - & \lambda_2 & \\ III' & a_2 + 3a_3 & = & & & & & \lambda_2 & \\ IV & a_3 & = & & & & & & \lambda_3 \end{array}$$

$$\overset{III'+II'\to II'}{\Longleftrightarrow} \begin{array}{lcccccc} I & a_0 & = & \lambda_0 & & & \\ II'' & a_1 + a_2 + a_3 & = & & \lambda_1 & & \\ III' & a_2 + 3a_3 & = & & & \lambda_2 & \\ IV & a_3 & = & & & & \lambda_3 \end{array}$$

Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + (a_1 + a_2 + a_3)x + (a_2 + 3a_3)x(x-1) + a_3 x(x-1)(x-2) \\ &= a_0 h_0(x) + (a_1 + a_2 + a_3)h_1(x) + (a_2 + 3a_3)h_2(x) + a_3 h_3(x), \end{aligned}$$

d.h. $p = a_0 h_0 + (a_1 + a_2 + a_3)h_1 + (a_2 + 3a_3)h_2 + a_3 h_3 \in \mathrm{Lin}(\{h_0, h_1, h_2, h_3\})$.

- Zu zeigen: B' ist linear unabhängig:
  Seien $\lambda_0, ..., \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

  $$0 = \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3,$$

  d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

  $$0 = \lambda_0 h_0(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) + \lambda_3 h_3(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x(x-1) + \lambda_3 x(x-1)(x-2).$$

  Wähle $x = 0 \Rightarrow 0 = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 0 + ... + \lambda_3 \cdot 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$.
  Wähle $x = 1 \Rightarrow 0 = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 0 \overset{\lambda_0=0}{\Rightarrow} \lambda_1 = 0$.
  Wähle $x = 2 \Rightarrow 0 = \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 \cdot 0 = 2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0$.
  Wähle $x = 3 \overset{\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0}{\Rightarrow} \lambda_3 = 0$.
  Es folgt insgesamt $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

(c) Gesucht sind $\lambda_0, ..., \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$p = \lambda_0 h_0 + \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \lambda_3 h_3,$$

d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ soll gelten:

$$p(x) = \lambda_0 h_0(x) + \lambda_1 h_1(x) + \lambda_2 h_2(x) + \lambda_3 h_3(x),$$

Einsetzen von $x = 0, 1, 2, 3$ liefert:

- $x = 0 \Rightarrow 0 = p(0) = \lambda_0 \Rightarrow \lambda_0 = 0$
- $x = 1 \Rightarrow 1 = p(1) = \lambda_0 + \lambda_1 \overset{\lambda_0=0}{=} \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 1$
- $x = 2 \Rightarrow 1 = p(1) = \lambda_0 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \overset{\lambda_0=0,\lambda_1=1}{=} 2 + 2\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{2}$
- $x = 3 \Rightarrow 6 = p(3) = \lambda_0 + 3\lambda_1 + 6\lambda_2 + 6\lambda_3 \overset{\lambda_0=0,\lambda_1=1,\lambda_2=-\frac{1}{2}}{=} 6\lambda_3 \Rightarrow \lambda_3 = 1$.

Damit erhalten wir:

$$p = 0 \cdot h_0 + 1 \cdot h_1 - \frac{1}{2}h_2 + 1 \cdot h_3,$$

(d.h. $p(x) = x - \frac{1}{2}x(x-1) + x(x-1)(x-2)$).
Die Basis B' ist vorzuziehen, weil diese ein einfacheres Gleichungssystem liefert, welches direkt mit Einsetzen gelöst werden kann (s.o.), keine Umformungen sind nötig. Bei B wäre das nicht der Fall gewesen, dort wären Umformungen nötig gewesen.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`