Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

5. Präsenzblatt

Aufgabe P17 (Lineare Unabhängigkeit in verschiedenen Vektorräumen).

Untersuchen Sie die folgenden Mengen von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit im angegebenen Vektorraum.

(a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ im Standard-Vektorraum F_5^3 über F_5.

(b) Die Abbildungen $f_1, ..., f_4$ mit $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 3x + 2$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = (x + 2)^2$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(c) $\sqrt{3}, \sqrt{5}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.

(d) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := n \cdot (n-1), \qquad b_n := (n-1)\cdot(n-2), \qquad c_n := n\cdot(n-2)$$

im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe P18 (Lineare Unabhängigkeit und Basen im $\mathbb{R}^n$).

Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Gegeben seien Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^2$ durch

$$v_1 := (1+\alpha, 2), \qquad v_2 := (1, 2+\alpha).$$

(a) Ermitteln Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Vektoren v_1, v_2 linear unabhängig sind.

Gegeben seien nun Vektoren des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ durch

$$w_1 := (1,1,1), \qquad w_2 := (1,3,2), \qquad w_3 := (0,2,2), \qquad w_4 := (1,-1,1).$$

Sei $U_1 := \mathrm{Lin}(\{w_1, w_2\})$ und $U_2 := \mathrm{Lin}(\{w_3, w_4\})$.

(b) Zeigen Sie, dass (w_1, w_2, w_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bildet, indem Sie die charakterisierenden Eigenschaften (Erzeugendensystem und linear unabhängig) nachrechnen.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

Aufgabe P19 (Beweise mit linearer Unabhängigkeit und Basen).

Sei K ein Körper. Wir betrachten für $n, m \in \mathbb{N}$ die Standardvektorräume K^n mit Basis $B_1 = (b_1, ..., b_n)$ und K^m mit Basis $B_2 = (b'_1, ..., b'_m)$.

(a) Zeigen Sie, dass $B := ((b_1, 0_{K^m}), ..., (b_n, 0_{K^m}), (0_{K^n}, b'_1), ..., (0_{K^n}, b'_m))$ eine Basis des Vektorraumes K^{n+m} bildet.

Sei nun $K = \mathbb{R}$ und V ein K-Vektorraum mit Basis (a_1, a_2, a_3).

(b) Wir definieren

$$b_1 := a_1 + a_2, \qquad b_2 := a_1 + a_3, \qquad b_3 := 3a_1 + 2a_2 + a_3, \qquad b_4 := a_2 + a_3.$$

Überprüfen Sie, ob (b_1, b_2, b_3) oder (b_1, b_2, b_4) linear unabhängig sind.

Aufgabe P20 (Polynom-Funktionenraum).
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ (vgl. Blatt 4, Aufgabe P16). Für $d \in \mathbb{N}$ sei

$$P := \{p \in \mathbb{R}^\mathbb{R} | a_0, ..., a_3 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k \cdot x^k\}$$

der Untervektorraum der Polynome vom Grad höchstens 3.

(a) Seien $p_i \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ $(i = 0, ..., 3)$ mit

$$p_0(x) := 1, \quad p_1(x) := x, \quad p_2(x) := x^2, \quad p_3(x) := x^3$$

Zeigen Sie, dass $B := (p_0, p_1, p_2, p_3)$ eine Basis von P bildet.

(b) Seien $h_i \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ $(i = 0, ..., 3)$ mit

$$h_0(x) := 1, \quad h_1(x) := x, \quad h_2(x) := x \cdot (x-1), \quad h_3(x) := x \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

Zeigen Sie, dass auch $B' := (h_0, h_1, h_2, h_3)$ eine Basis von P bildet.

(c) Gesucht seien Polynom $p \in P$ mit $p(0) = 0$, $p(1) = 1$, $p(2) = 1$ und $p(3) = 6$. Finden Sie eine Darstellung von p als Linearkombination der Elemente von B'. Warum ist die Basis B' der Basis B für diese Aufgabe vorzuziehen?

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`