UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

4. Präsenzblatt - Lösungen

Aufgabe P13 (Beispiele / Gegenbeispiele für (Unter-)Vektorräume, Punkte).

Beantworten Sie die folgenden Fragen entweder durch einen Nachweis oder durch Angabe der verletzten Eigenschaft mit einem expliziten Gegenbeispiel:

(a) Sind die folgenden Mengen Untervektorräume des Standardvektorraums $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ (mit komponentenweiser Multiplikation und Addition)?

(i) $U_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

(ii) $U_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

(iii) $U_3 := \{(1 + \lambda, 1 - \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

(iv) $U_4 := \{(x^4, x^3) \mid x \in \mathbb{R}\}$

(v) $U_5 := \{(x^4 - y^4, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$

(vi) $U_6 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \text{ oder } y = 0\}$.

(b) Sind die folgenden Strukturen $(V, +_V)$ Vektorräume über dem jeweils angegebenen Körper K und der angegebenen skalaren Multiplikation $\cdot_V$? Hierbei bezeichnen „+" stets die normale (bzw. komponentenweise) Addition und „$\cdot$" die normale Multiplikation.

(i) $(V, +_V) = (S_3, \circ)$ über $K = \mathbb{Z}$ mit $\cdot_V : S_3 \times \mathbb{Z} \to S_3, (z, \sigma) \mapsto \sigma^z$,

(ii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{Q}$ mit $\cdot_V : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a \cdot x, a \cdot y)$,

(iii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{Q}$ mit $\cdot_V : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a \cdot y, a \cdot x)$,

(iv) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit
$$\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto \begin{cases} (\frac{1}{a} \cdot x, \frac{1}{a} \cdot y), & a \neq 0, \\ (0, 0), & a = 0 \end{cases},$$

(v) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (2^{a-1} \cdot x, 2^{a-1} \cdot y)$,

Lösung: (a) (i) Kein UVR (Nullvektor nicht enthalten). Es ist $(x, y) = (0, 0) \notin U_1$, denn $0 + 0 = 0 \neq 1$. Da aber $(0, 0)$ der Nullvektor in $\mathbb{R}^2$ ist, müsste er laut VL auch in jedem UVR enthalten sein.

(ii) Kein UVR (skalare Mult. nicht abgeschlossen). Es ist zum Beispiel $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in U_2$, denn $(\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \leq 1$.
Wähle $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$. Aber es ist $\lambda \cdot (x, y) = (1, 1) \notin U_2$, denn $1^2 + 1^2 = 2 > 1$.

(iii) Kein UVR (Nullvektor nicht enthalten). Es ist $(x, y) = (0, 0) \notin U_3$, denn sonst müsste es $\lambda \in \mathbb{R}$ geben mit $(1 + \lambda, 1 - \lambda) = (0, 0)$, d.h. $1 + \lambda = 0$ (I) und $1 - \lambda = 0$ (II). Gleichung I liefert $\lambda = -1$ und Gleichung II liefert $\lambda = 1$, Widerspruch.

(iv) Kein UVR (skalare Mult. nicht abgeschlossen). Es ist zum Beispiel $(1,1) \in U_4$ (wähle $x = 1$).
Wähle $\lambda = 2 \in \mathbb{R}$. Aber es ist $\lambda \cdot (1,1) = (2,2) \notin U_4$, denn sonst müsste es $x \in \mathbb{R}$ geben mit $(2,2) = (x^4, x^3)$, d.h. $x^4 = 2$ (I) und $x^3 = 2$ (II). Gleichung II liefert $x = 2^{1/3}$, dies liefert einen Widerspruch mit I.

(v) Ist UVR. Es gilt $U_5 = \{t \cdot (1,0) | t \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}(\{(1,0)\})$ (Beweis. $\subset$: $t \in \mathbb{R}$ beliebig. Fall $t < 0$: Wähle $x = 0$, $y = (-t)^{1/4} \Rightarrow (t,0) = (x^4 - y^4, 0)$. Fall $t \geq 0$: Wähle $x = t^{1/4}$, $y = 0 \Rightarrow (t,0) = (x^4 - y^4, 0)$. $\supset$: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ beliebig. Wähle $t = x^4 - y^4$ $\Rightarrow (t,0) = (x^4 - y^4, 0)$.)
Da Lineare Hüllen Untervektorräume bilden (vgl. Aussage 4.14(a) aus VL), ist U_5 ein UVR.

(vi) Kein UVR (Addition nicht abgeschlossen). Es ist zum Beispiel $v := (1,0) \in U_6$ und $w := (0,1) \in U_6$, aber $v + w = (1,1) \notin U_6$, denn beide Komponenten sind nicht Null.

(b) (i) Kein VR. $(S_3, \circ)$ ist keine abelsche Gruppe (vgl. Vorlesung)

(ii) Ist VR. $(\mathbb{R}^2, +)$ (komponentenweise Addition) ist laut VL abelsche Gruppe. Es bleibt die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation zu zeigen. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

- $(\lambda + \mu) \cdot_V v = ((\lambda + \mu) \cdot v_1, (\lambda + \mu) \cdot v_2) = (\lambda v_1 + \mu v_1, \lambda v_2 + \mu v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2) +_V (\mu v_1, \mu v_2) = \lambda \cdot_V v + \mu \cdot_V v$
- $\lambda \cdot_V (v +_V w) = \lambda \cdot_V (v_1 + w_1, v_2 + w_2) = (\lambda \cdot (v_1 + w_1), \lambda \cdot (v_2 + w_2)) = (\lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot w_1, \lambda \cdot v_2 + \lambda \cdot w_2) = (\lambda \cdot v_1, \lambda \cdot v_2) +_V (\lambda \cdot w_1, \lambda \cdot w_2) = \lambda \cdot_V v +_V \lambda \cdot_V w$.
- $\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V v) = \lambda \cdot_V (\mu \cdot v_1, \mu \cdot v_2) = (\lambda \cdot (\mu \cdot v_1), \lambda \cdot (\mu \cdot v_2)) = ((\lambda \cdot \mu) \cdot v_1, (\lambda \cdot \mu) \cdot v_2) = (\lambda \cdot \mu) \cdot_V v$
- $1 \cdot_V v = (1 \cdot v_1, 1 \cdot v_2) = (v_1, v_2) = v$.

(iii) Kein VR. Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ist verletzt. Wähle zum Beispiel $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$1 \cdot_V v = 1 \cdot_V (1,2) = (1 \cdot 2, 1 \cdot 1) = (2,1) \neq v.$$

(iv) Kein VR. Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ist verletzt. Wähle zum Beispiel $v = (1,1)$ und $\lambda = 3 \in \mathbb{R}, \mu = 2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$(\lambda + \mu) \cdot_V v = 5 \cdot_V (1,1) = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}),$$

aber

$$\lambda \cdot_V v + \mu \cdot_V v = 3 \cdot_V (1,1) + 2 \cdot_V (1,1) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}),$$

d.h. $(\lambda + \mu) \cdot_V v \neq \lambda \cdot_V v + \mu \cdot_V v$.

(v) Kein VR. Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ist verletzt. Wähle zum Beispiel $\lambda = \mu = 3 \in \mathbb{R}$ und $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V v) = 3 \cdot_V (3 \cdot_V (1,1)) = 3 \cdot_V (4,4) = (16,16),$$

aber

$$(\lambda \cdot \mu) \cdot_V v = (3 \cdot 3) \cdot_V (1,1) = 9 \cdot_V (1,1) = (2^8, 2^8) = (256, 256),$$

d.h. $\lambda \cdot_V (\mu \cdot_V v) \neq (\lambda \cdot \mu) \cdot_V v$.

Aufgabe P14 (Rechnen im Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$).

Wir betrachten den Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen komponentenweisen Addition und Multiplikation. Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden hier als Spalten anstelle von Zeilen dargestellt.

(a) Schreiben Sie die folgenden Untervektorräume U_i $(i = 1, 2, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ als lineare Hülle von möglichst wenig Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} U_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ U_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\} \\ U_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \right. \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \left. 3x_1 - x_2 = 0 \right\} \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ in U_1 und U_2 liegt, indem Sie ihn als Linearkombination der Vektoren der in (a) bestimmten linearen Hüllen darstellen.

Lösung:

Hinweis: Es gibt hier keine eindeutigen Ergebnisse für die lineare Hüllen in (a), viele Darstellungen sind möglich. Entsprechend ist auch die Darstellung in (b) nicht eindeutig.

(a) (i) Es gilt

$$\begin{aligned} U_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\}), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist jedoch nicht die minimal mögliche Anzahl an Vektoren.

Die folgende Herleitung muss nicht Teil der Lösung sein: Überprüfe, ob $v_2 \in$

Lin$(\{v_1, v_3\})$ *durch Lösen eines Gleichungssystems in* $a, b \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned} & v_2 = a \cdot v_1 + b \cdot v_3 \\ \iff \quad & \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + b \\ 4a - 5b \\ -a - 2b \end{pmatrix} \\ \iff \quad & \begin{array}{rcll} 3 & = & -a - 2b & I \\ 2 & = & -3a + b & II \\ 1 & = & 4a - 5b & III \end{array} \\ \overset{-3 \cdot I + II \to II, 4 \cdot I + III \to III}{\iff} \quad & \begin{array}{rcll} 3 & = & -a - 2b & I \\ -7 & = & 7b & II' \\ -13 & = & 13b & III' \end{array} \end{aligned}$$

II' und III' sind äquivalent, daher kann III' weggelassen werden. Die (einzige) Lösung von II' ist $b = -1$ *und daher (einsetzen in I):* $a = -1$*.*

Tatsächlich gilt:

$$v_2 = -v_1 - v_3,$$

d.h. $v_2 \in \text{Lin}(\{v_1, v_3\})$. Mit Aufgabe P15(c) folgt: $U_1 = \text{Lin}(\{v_1, v_2, v_3\}) = \text{Lin}(\{v_1, v_3\})$.
Anmerkung: Weniger Vektoren sind nicht möglich, denn dann müsste gelten: $v_1 \in$ *Lin*$(\{v_3\})$ *oder* $v_3 \in$ *Lin*$(\{v_1\})$*, d.h. es müsste* $a \in \mathbb{R}$ *geben mit* $v_1 = a \cdot v_3$ *oder* $v_3 = a \cdot v_1$*, was offensichtlich nicht möglich ist).*

(ii) Ansatz: Löse das Lineare Gleichungssystem

$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \quad I$$

in $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, um eine Darstellung als lineare Hülle zu erhalten. (Gleichung I beinhaltet 3 Variablen, aber nur eine Bedingung. Wir können also 2 Variablen frei wählen). Wähle x_2, x_3 beliebig. Dann ist I äquivalent zu $x_1 = x_2 - \frac{1}{2}x_3$, d.h.

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Lin}(\{v_1, v_2\}), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anmerkung: Weniger Vektoren sind nicht möglich, denn dann müsste gelten: $v_1 \in$ *Lin*$(\{v_2\})$ *oder* $v_2 \in$ *Lin*$(\{v_1\})$*, d.h. es müsste* $a \in \mathbb{R}$ *geben mit* $v_1 = a \cdot v_2$ *oder* $v_2 = a \cdot v_1$*, was offensichtlich nicht möglich ist).*

(iii) Ansatz: Löse das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} 0 &=& -x_1+2x_2+x_3 & I \\ 0 &=& x_1+3x_2+2x_3 & II \\ 0 &=& 3x_1-x_2 & III \end{array} \quad \overset{2\cdot I\to II}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rcll} 0 &=& -x_1+2x_2+x_3 & I \\ 0 &=& 3x_1-x_2 & II \\ 0 &=& 3x_1-x_2 & III \end{array}$$

$$\overset{II,III \text{ äquivalent}}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rcll} 0 &=& -x_1+2x_2+x_3 & I \\ 0 &=& 3x_1-x_2 & II \\ 0 &=& 3x_1-x_2 & III \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcll} 0 &=& -x_1+2x_2+x_3 & I \\ x_2 &=& 3x_1 & II \end{array}$$

$$\overset{II \text{ in } I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rcll} x_3 &=& -5x_1 & I \\ x_2 &=& 3x_1 & II \end{array}$$

in $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, um eine Darstellung als lineare Hülle zu erhalten. (Ziel der obigen Umformungen war, x_2, x_3 jeweils in Abhängigkeit von x_1 darzustellen).
Gleichungen I,II beinhalten 3 Variablen, aber nur 2 (nicht äquivalente) Bedingungen. Wir können also 1 Variable frei wählen. Wähle $x_1 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann folgt aus I,II:

$$\begin{aligned} U_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ -5x_1 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \middle| x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Lin}(\{v_1\}), \qquad v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Anmerkung: Weniger Vektoren sind nicht möglich, denn dann müsste gelten: $U_2 = \{0\}$, *was offensichtlich nicht möglich ist).*

(b) • $v \in U_1$: Zu finden sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = v = a \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} 3 &=& -3a+b \\ 7 &=& 4a-5b \\ 8 &=& -a-2b \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcll} 8 &=& -a-2b & I \\ 3 &=& -3a+b & II \\ 7 &=& 4a-5b & III \end{array}$$

$$\overset{-3\cdot I+II\to II, -3\cdot 4\cdot I+III\to III}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{array}{rcll} 8 &=& -a-2b & I' \\ -21 &=& 7b & II' \\ 39 &=& -13b & III' \end{array}$$

II', III' sind äquivalent, daher muss nur eine der Gleichungen berücksichtigt werden. II' liefert $b = -3$. Einsetzen in I' liefert $a = -2$. Damit ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = v = -2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- $v \in U_2$: Zu finden sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix} = v = a \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{rcll} 3 & = & a - \frac{1}{2}b & I \\ 7 & = & a & II \\ 8 & = & b & III \end{array}$$

II liefert $a = 7$, III liefert $b = 8$. Einsetzen von $a = 7, b = 8$ in I liefert eine wahre Aussage. Damit ist

$$\begin{pmatrix}3\\7\\8\end{pmatrix} = v = 7 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 8 \cdot \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe P15 (Direkte Summe von Untervektorräumen, Eigenschaften der linearen Hülle).

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie:

(a) Die direkte Summe

$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$

ist ebenfalls ein Untervektorraum von V.

(b) Seien $u, v \in V$. Zeigen Sie: $\mathrm{Lin}(\{u, v\}) = \mathrm{Lin}(\{u, u + v\})$.

(c) Seien $v, v_1, ..., v_n \in V$. Zeigen Sie:

$$v \in \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_n\}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_n\}) = \mathrm{Lin}(\{v, v_1, ..., v_n\})$$

(d) Gilt $\mathrm{Lin}(M) \cup \mathrm{Lin}(M') = \mathrm{Lin}(M \cup M')$? Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage anhand eines Gegenbeispiels.

Lösung: (a) Zu zeigen sind die Eigenschaften eines UVR von V:

- U_1, U_2 UVR $\Rightarrow 0_V \in U_1,\ 0_V \in U_2 \Rightarrow 0_V = 0_V + 0_V \in U_1 + U_2 \Rightarrow U_1 + U_2 \neq \emptyset$.
- Seien $v, v' \in U_1 + U_2$
  $\Rightarrow$ Es gibt $u_1, u_1' \in U_1$, $u_2, u_2' \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$, $v' = u_1' + u_2'$
  $\Rightarrow v + v' = \underbrace{(u_1 + u_1')}_{\in U_1 (\text{ (UVR)}} + \underbrace{(u_2 + u_2')}_{\in U_2 (\text{ (UVR)}} \in U_1 + U_2$.
- Sei $v \in U_1 + U_2$, $\lambda \in K$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$ mit $v = u_1 + u_2$
  $\Rightarrow \lambda v = \lambda(u_1 + u_2) = \underbrace{\lambda u_1}_{\in U_1 (\text{ (UVR)}} + \underbrace{\lambda u_2}_{\in U_2 (\text{ (UVR)}} \in U_1 + U_2$.

(b) „$\subseteq$“: Sei $w \in \mathrm{Lin}(\{u, v\})$.
$\Rightarrow$ Es gibt $a, b \in K$ mit $w = a \cdot u + b \cdot v$
$\Rightarrow w = a(u + v) + (b - a)v$
$\Rightarrow w \in \mathrm{Lin}(\{u, u + v\})$.
„$\supseteq$“: Sei $w \in \mathrm{Lin}(\{u, u + v\})$.
$\Rightarrow$ Es gibt $a, b \in K$ mit $w = a \cdot (u + v) + b \cdot v$
$\Rightarrow w = au + (a + b)v$
$\Rightarrow w \in \mathrm{Lin}(\{u, v\})$.

(c) Sei $v \in \text{Lin}(\{v_1, ..., v_n\})$.
Zu zeigen: $\text{Lin}(\{v_1, ..., v_n\}) = \text{Lin}(\{v, v_1, ..., v_n\})$

- „$\subset$“: Klar aus VL (4.15(b)): $\{v_1, ..., v_n\} \subset \{v, v_1, ..., v_n\} \Rightarrow \text{Lin}(\{v_1, ..., v_n\}) \subset \text{Lin}(\{v, v_1, ..., v_n\})$, vgl
- „$\supset$“: Sei $w \in \text{Lin}(\{v, v_1, ..., v_n\})$
  Voraussetzung $v \in \text{Lin}(\{v_1, ..., v_n\}) \Rightarrow \exists\, b_1, ..., b_n \in K : v = b_1 v_1 + ... + b_n v_n$. (*)
  $w \in \text{Lin}(\{v, v_1, ..., v_n\}) \Rightarrow \exists a_0, ..., a_n \in K$ so dass

$$\begin{aligned} w &= a_0 v + a_1 v_1 + ... + a_n v_n \\ &\overset{(*)}{=} a_0(b_1 v_1 + ... + b_n v_n) + a_1 v_1 + ... + a_n v_n \\ &= (a_0 b_1 + a_1) \cdot v_1 + ... + (a_0 b_n + a_n) \cdot v_n \end{aligned}$$

  $\Rightarrow w \in \text{Lin}(\{v_1, ..., v_n\})$.

(d) Nein, dies gilt im Allgemeinen nicht (kurz: Die linke Seite ist im Allgemeinen kein UVR). Wähle zum Beispiel den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$, $M = \{(1,1)\} \subset V$ und $M' = \{(-1,1)\} \subset V$. Dann gilt: $\text{Lin}(M \cup M') \neq \text{Lin}(M) \cup \text{Lin}(M')$, denn:
Wähle $v = (0,2)$.
Es gilt $v \in \text{Lin}(M \cup M')$, denn $v = 1 \cdot (1,1) + 1 \cdot (-1,1) \in \text{Lin}(\{(1,1), (-1,1)\})$.
Es gilt aber nicht $v \in \text{Lin}(M) \cup \text{Lin}(M')$, denn: Angenommen, $v \in \text{Lin}(M) \cup \text{Lin}(M')$, so wäre $v \in \text{Lin}(M)$ oder $v \in \text{Lin}(M')$.
Fall 1: $v \in \text{Lin}(M) \Rightarrow$ Es gibt $a \in \mathbb{R}$ mit $(0,2) = v = a \cdot (1,1) = (a,a)$, Widerspruch.
Fall 2: $v \in \text{Lin}(M') \Rightarrow$ Es gibt $a \in \mathbb{R}$ mit $(0,2) = v = a \cdot (-1,1) = (-a,a)$, Widerspruch.

Aufgabe P16 (Vektorraum der Abbildungen).
Wir betrachten den Raum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildungen}\}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definieren wir die Addition $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und skalare Multiplikation $\lambda \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ (\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x), \end{aligned}$$

womit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum wird ($0_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0_V(x) = 0$ bezeichne die Nullfunktion). Seien $D \in \mathbb{N}$ fest,

$$\begin{aligned} U_1 &:= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}, \\ U_2 &:= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists K \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq K \Rightarrow f(x) = 0\} \\ U_3 &:= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists c_1, ..., c_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=1}^{D} c_k \sin(k \cdot x)\}, \\ U_4 &:= \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ b, & x > 0 \end{cases}\right\}. \end{aligned}$$

der Raum der geraden Funktionen, der Funktionen mit Funktionswert 0 um den Ursprung herum, der trigonometrischen Polynomfunktionen und der Stufenfunktionen. Zeigen Sie:

(a) U_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Es gibt keine endliche Menge $M \subset U_2$, so dass $U_2 = \mathrm{Lin}(M)$.

(c) Für $i \in \{3,4\}$: Geben Sie eine endliche Menge $M \subseteq U_i$ an, so dass $U_i = \mathrm{Lin}(M)$.

Lösung:

(a) Wir zeigen die Verktorraumaxiome für alle vorliegenden Meengen.

(i)
- $U_1 \neq \emptyset$, denn: $\forall x \in \mathbb{R} : 0_V(x) = 0 = 0_V(-x)$, d.h. $0_V \in U_1$.
- Seien $f, g \in U_1$.
  $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \overset{f,g \in U_1}{=} f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$. Daher $f + g \in U_1$.
- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in U_1$.
  $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \overset{f \in U_1}{=} \lambda f(-x) = (\lambda f)(-x)$.
  Daher $\lambda f \in U_1$.

(ii)
- $U_2 \neq \emptyset$, denn: $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1 \Rightarrow 0_V(x) = 0$, d.h. $0_V \in U_2$.
- Seien $f, g \in U_2$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $K_1, K_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq K_1 \Rightarrow f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq K_2 \Rightarrow g(x) = 0$.
  Wähle $K := \min\{K_1, K_2\}$.
  $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, |x| \leq K_2$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0 + 0 = 0$.
  $\Rightarrow f + g \in U_2$.
- Sei $f \in U_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $K \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq K \Rightarrow f(x) = 0$.
  Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq K$. Dann gilt $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot 0 = 0$.
  $\Rightarrow \lambda f \in U_2$.

(iii)
- $U_3 \neq \emptyset$, denn: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $0_V(x) = \sum_{k=1}^{D} 0 \cdot \sin(k \cdot x)$, d.h. $0_V \in U_3$.
- Seien $f, g \in U_3$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $c_1, ..., c_D \in \mathbb{R}$ und $d_1, ..., d_D \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=1}^{D} c_k \sin(k \cdot x)$ und $\forall x \in \mathbb{R} : g(x) = \sum_{k=1}^{D} d_k \sin(k \cdot x)$.
  $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sum_{k=1}^{D} c_k \sin(k \cdot x) + \sum_{k=1}^{D} d_k \sin(k \cdot x) = \sum_{k=1}^{D} \underbrace{(c_k + d_k)}_{=: c'_k \in \mathbb{R}} \sin(k \cdot x).$$
  $\Rightarrow f + g \in U_3$.
- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in U_3$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $c_1, ..., c_D \in \mathbb{R}$, so dass $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=1}^{D} c_k \sin(k \cdot x)$.
  $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
  $$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \sum_{k=1}^{D} c_k \sin(k \cdot x) = \sum_{k=1}^{D} \underbrace{(\lambda c_k)}_{=: c'_k \in \mathbb{R}} \sin(k \cdot x).$$
  $\Rightarrow \lambda f \in U_3$.

(iv)
- $U_4 \neq \emptyset$, denn: Wähle $a = 0 = b$, so ist $f(x) := \begin{cases} a, & x \leq 0 \\ b, & x > 0 \end{cases} = 0 = 0_V(x)$, d.h. $0_V \in U_4$.

- Seien $f, g \in U_4$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit
  $$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ b, & x > 0 \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} c, & x \leq 0, \\ d, & x > 0 \end{cases}.$$
  $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$:
  $$(f+g)(x) = \begin{cases} a+c, & x \leq 0, \\ b+d, & x > 0 \end{cases},$$
  d.h. $f + g \in U_4$ (wegen $a + c \in \mathbb{R}, b + d \in \mathbb{R}$).
- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in U_4$.
  $\Rightarrow$ Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit
  $$\forall x \in \mathbb{R}: \quad f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ b, & x > 0 \end{cases}.$$
  $\Rightarrow$ Für alle $x \in \mathbb{R}$:
  $$(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x) = \begin{cases} \lambda a, & x \leq 0, \\ \lambda b, & x > 0 \end{cases},$$
  d.h. $\lambda f \in U_4$.

(b) Angenommen, es gäbe eine endliche Menge $M = \{f_1, ..., f_r\} \subset U_2$ mit $U_2 = \mathrm{Lin}(M)$.
$f_1, ..., f_r \in U_2 \Rightarrow$ Es gibt $K_1, ..., K_r \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq K_i \Rightarrow f_i(x) = 0$ $(i = 1, ..., r)$.
Definiere $K := \min\{K_1, ..., K_r\}$, und
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \frac{K}{2}, \\ 1, & |x| > \frac{K}{2}. \end{cases}$$
Dann gilt $f \in U_2$.
Es gilt aber nicht $f \in \mathrm{Lin}(M)$, denn: Wäre $f \in \mathrm{Lin}(M)$, so gäbe es $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit $f = \lambda_1 f_1 + ... + \lambda_r f_r$.
$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_r f_r(x)$
Aber:
$$f(\frac{3}{4}K) = 1 \neq 0 = \lambda_1 \cdot 0 + ... + \lambda_r \cdot 0 = \lambda_1 f_1(\frac{3}{4}K) + ... + \lambda_r f_r(\frac{3}{4}K),$$
Widerspruch!

(c)
- Wir betrachten U_3: Definiere Funktionen $f^{(k)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f^{(k)}(x) := \sin(k \cdot x)$ $(k = 1, ..., D)$, und setze $M = \{f^{(1)}, ..., f^{(D)}\}$ (offensichtlich gilt $M \subset U_3$).
  Wir zeigen, dass $\mathrm{Lin}(M) = U_3$.
  „$\subseteq$“: Dies folgt aus $M \subseteq U_3$ und aus der Vorlesung (Satz 4.14(b)).
  „$\supseteq$“: Sei $f \in U_3$ beliebig.
  $\Rightarrow$ Es gibt $c_1, ..., c_D \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=1}^{D} c_k \cdot \sin(k \cdot x) \overset{\text{Def.}}{=} \sum_{k=1}^{D} c_k \cdot f^{(k)}$
  $\Rightarrow f = \sum_{k=1}^{D} c_k \cdot f^{(k)}$
  $\Rightarrow f \in \mathrm{Lin}(U_3)$.

- Wir betrachten U_4: Definiere die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

  und setzen $M := \{f_1, f_2\}$. Wir zeigen: $U_4 = \mathrm{Lin}(M)$.
  „$\subseteq$“: Dies folgt aus $M \subseteq U_4$ und aus der Vorlesung (Satz 4.14(b)).
  „$\supseteq$“: Sei $f \in U_4$ beliebig.
  $\Rightarrow$ Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ b, & x > 0 \end{cases}$.
  $\Rightarrow$ Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ b, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0 \end{cases} + \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ b, & x > 0 \end{cases} = a \cdot f_1(x) + b \cdot f_2(x).$$

  $\Rightarrow f = af_1 + bf_2$
  $\Rightarrow f \in \mathrm{Lin}(M)$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`