UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

4. Präsenzblatt

Aufgabe P13 (Beispiele / Gegenbeispiele für (Unter-)Vektorräume, Punkte).

Beantworten Sie die folgenden Fragen entweder durch einen Nachweis oder durch Angabe der verletzten Eigenschaft mit einem expliziten Gegenbeispiel:

(a) Sind die folgenden Mengen Untervektorräume des Standardvektorraums $\mathbb{R}^2$ über $\mathbb{R}$ (mit komponentenweiser Multiplikation und Addition)?

- (i) $U_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 1\}$
- (ii) $U_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (iii) $U_3 := \{(1 + \lambda, 1 - \lambda) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$
- (iv) $U_4 := \{(x^4, x^3) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$
- (v) $U_5 := \{(x^4 - y^4, 0) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$
- (vi) $U_6 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0 \text{ oder } y = 0\}$.

(b) Sind die folgenden Strukturen $(V, +_V)$ Vektorräume über dem jeweils angegebenen Körper K und der angegebenen skalaren Multiplikation $\cdot_V$? Hierbei bezeichnen „$+$“ stets die normale (bzw. komponentenweise) Addition und „$\cdot$“ die normale Multiplikation.

- (i) $(V, +_V) = (S_3, \circ)$ über $K = \mathbb{Z}$ mit $\cdot_V : S_3 \times \mathbb{Z} \to S_3, (z, \sigma) \mapsto \sigma^z$,
- (ii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{Q}$ mit $\cdot_V : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a \cdot x, a \cdot y)$,
- (iii) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{Q}$ mit $\cdot_V : \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (a \cdot y, a \cdot x)$,
- (iv) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit
$$\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto \begin{cases} (\frac{1}{a} \cdot x, \frac{1}{a} \cdot y), & a \neq 0, \\ (0, 0), & a = 0 \end{cases},$$
- (v) $(V, +_V) = (\mathbb{R}^2, +)$ über $K = \mathbb{R}$ mit $\cdot_V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (a, (x, y)) \mapsto (2^{a-1} \cdot x, 2^{a-1} \cdot y)$,

Aufgabe P14 (Rechnen im Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$).

Wir betrachten den Standardvektorraum $\mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ mit der üblichen komponentenweisen Addition und Multiplikation. Die Elemente von $\mathbb{R}^n$ werden hier als Spalten anstelle von Zeilen dargestellt.

(a) Schreiben Sie die folgenden Untervektorräume U_i $(i = 1, 2, 3)$ des $\mathbb{R}^3$ als lineare Hülle von möglichst wenig Vektoren aus $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
U_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} -3x_1 + 2x_2 + x_3 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} \,\middle|\, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
U_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\} \\
U_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \forall x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} : -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. 3x_1 - x_2 = 0 \right\}
\end{aligned}
$$

(c) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ in U_1 und U_2 liegt, indem Sie ihn als Linearkombination der Vektoren der in (a) bestimmten linearen Hüllen darstellen.

Aufgabe P15 (Direkte Summe von Untervektorräumen, Eigenschaften der linearen Hülle).

Seien U_1, U_2 Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie:

(a) Die direkte Summe
$$U_1 + U_2 := \{u_1 + u_2 \,|\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$$
ist ebenfalls ein Untervektorraum von V.

(b) Seien $u, v \in V$. Zeigen Sie: $\mathrm{Lin}(\{u, v\}) = \mathrm{Lin}(\{u, u + v\})$.

(c) Seien $v, v_1, ..., v_n \in V$. Zeigen Sie:
$$v \in \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_n\}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Lin}(\{v_1, ..., v_n\}) = \mathrm{Lin}(\{v, v_1, ..., v_n\})$$

(d) Gilt $\mathrm{Lin}(M) \cup \mathrm{Lin}(M') = \mathrm{Lin}(M \cup M')$? Zeigen oder widerlegen Sie die Aussage anhand eines Gegenbeispiels.

Aufgabe P16 (Vektorraum der Abbildungen).

Wir betrachten den Raum der Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,
$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildungen}\}.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definieren wir die Addition $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und skalare Multiplikation $\lambda \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$
\begin{aligned}
(f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \\
(\lambda \cdot f)(x) &:= \lambda \cdot f(x),
\end{aligned}
$$

womit $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum wird ($0_V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 0_V(x) = 0$ bezeichne die Nullfunktion).

Seien $D \in \mathbb{N}$ fest,

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = f(-x)\}, \\
U_2 &:= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists K \in \mathbb{R}_{>0} : \forall x \in \mathbb{R} : |x| \leq K \Rightarrow f(x) = 0\} \\
U_3 &:= \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists c_1, ..., c_D \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sum_{k=1}^{D} c_k \sin(k \cdot x)\}, \\
U_4 &:= \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \,|\, \exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \begin{cases} a, & x \leq 0, \\ b, & x > 0 \end{cases}\right\}.
\end{aligned}$$

der Raum der geraden Funktionen, der Funktionen mit Funktionswert 0 um den Ursprung herum, der trigonometrischen Polynomfunktionen und der Stufenfunktionen. Zeigen Sie:

(a) U_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

(b) Es gibt keine endliche Menge $M \subset U_2$, so dass $U_2 = \mathrm{Lin}(M)$.

(c) Für $i \in \{3, 4\}$: Geben Sie eine endliche Menge $M \subseteq U_i$ an, so dass $U_i = \mathrm{Lin}(M)$.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`