UNIVERSITÄT HEIDELBERG
ZUKUNFT SEIT 1386

Lineare Algebra 1
Prof. Dr. R. Dahlhaus
Dr. S. Richter, N. Phandoidaen
Wintersemester 2018/2019

3. Präsenzblatt

Aufgabe P9 (Beispiele für Ringe und Körper).
Seien $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Es bezeichnen „$+$“ und „$\cdot$“ die übliche Addition und Multiplikation in $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ und $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ sind kommutative Ringe mit 1.

(a) Geben Sie das neutrale Element bzgl. Addition, das inverse Element bzgl. Addition für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ und das Einselement in $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ an.

(b) Zeigen Sie: $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ist kein Körper.

(c) Zeigen Sie: $(\mathbb{Q}[\sqrt{2}], +, \cdot)$ ist ein Körper.

Aufgabe P10 (Beispiele / Gegenbeispiele für Ringe).
Gegeben seien die folgenden Strukturen $(R, +, \cdot)$:

(i) $(S, +, \cdot)$, wobei $S := \{\frac{a}{2^i} : a \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\}$ mit der üblichen Addition und Multiplikation,

(ii) $(F_6, +_6, \cdot_6)$,

(iii) $(F_{13}, +_{13}, \cdot_{13})$,

(iv) $(S, \oplus, \odot)$, wobei $S := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ Abbildung}\}$ und für $f, g \in S$ die Abbildungen $f \oplus g, f \odot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert werden durch

$$(f \oplus g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f \odot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$$

(v) $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$, wobei

$$(a_1, b_1) \oplus (a_2, b_2) := (a_1 + a_2, b_1 + b_2), \qquad (a_1, b_1) \odot (a_2, b_2) := (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2).$$

(vi) $(S, \Delta, \cap)$, wobei $S := \{A \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \text{ endlich}\}$, $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. *Hinweis: Dies ist ein Ring.*

(vii) $(\mathbb{R} \backslash \{-1\}, \oplus, \cdot)$, wobei $a \oplus b := a + b + a \cdot b$ und „$\cdot$“ die übliche Multiplikation.

Gelten die folgenden Aussagen für die obigen Strukturen $(R, +, \cdot)$? Beantworten Sie die Fragen jeweils mit Ja/Nein. Geben Sie im Falle von 'Ja' *nur* die geforderten Größen an (keine weiteren Nachweise) und im Falle von 'Nein' ein explizites Gegenbeispiel.

(a) $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring.
Geben Sie das neutrale Element bzgl. Addition und das inverse Element bzgl. Addition für ein beliebiges $x \in R$ an.

(b) $(R, +, \cdot)$ ist ein Ring mit 1.
Geben Sie das Einselement an.

(c) $(R, +, \cdot)$ ist ein nullteilerfreier Ring.

(d) $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Aufgabe P11 (Eigenschaften von F_m).
Sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$. Wie in der Vorlesung eingeführt gibt es für jedes $a \in \mathbb{Z}$ Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit $r \in \{0, ..., m-1\}$ so dass $a = q \cdot m + r$, und man definiert $r_m(a) := r$.

Es sei $(F_m, +_m, \cdot_m)$ wie in der Vorlesung eingeführt, das heißt $F_m = \{0, ..., m-1\}$ und die Verknüpfungen sind durch

$$a +_m b := r_m(a + b), \qquad a \cdot_m b := r_m(a \cdot b),$$

gegeben. Zeigen Sie:

(a) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$r_m(a) = r_m(b) \quad \iff \quad \exists s \in \mathbb{Z} : a - b = s \cdot m.$$

(b) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$r_m(r_m(a) + b) = r_m(a + b) = r_m(a + r_m(b)) = r_m(r_m(a) + r_m(b)).$$

(c) $(F_m, +_m)$ ist eine Gruppe.

Aufgabe P12 (Rechnen in F_m).
Für $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ sei $F_m = \{0, ..., m-1\}$ wie in der Vorlesung eingeführt. Im Folgenden schreiben wir kurz $+$ für $+_m$ und $\cdot$ für $\cdot_m$. Für $x \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$x^m := \underbrace{x \cdot ... \cdot x}_{m\text{-mal}}.$$

(a) Berechnen Sie in F_7 die Ausdrücke

$$4 \cdot (3^{-1} + 4), \qquad 2^{9568} \quad \text{und} \quad 3^p,$$

wobei $p = 5^{45}$.

(b) Sei $m \in \{7, 8\}$. Geben Sie alle $x \in F_m$ an, welche jeweils die Gleichungen $x^2 = 4$ und $4 \cdot x = 6$ lösen.

(c) Zeigen Sie, dass keine ganzzahligen Lösungen $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit $z > 1$ der Gleichung $x^2 + y^2 = 10^z - 1$ existieren.
Hinweis: Wenden Sie auf beiden Seiten der Gleichung $r_4(\cdot)$ an und untersuchen Sie die möglichen Werte der linken und der rechten Seite der Gleichung.

Dieses Blatt ist **nicht abzugeben** und wird in den Übungsgruppen besprochen.

Homepage der Vorlesung:
`https://ssp.math.uni-heidelberg.de/la1-ws2018/index.html`